Mathematics

DEC 1
D-

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

Helmut Hasse

Band 178

Heft 1

Ausgegeben am 26. Oktober 1937

Walter de Gruyter & Co.
vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.
Berlin W 35 und Leipzig
1937

Band 178. Heft 1.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Reichardt, Hans, und Udo Wegner, Arithmetische Charakterisierung von algebraisch auflösbaren Körpern und Gleichungen von Primzahlgrad	1
Nakayama, Tadasi, Divisionsalgebren über diskret bewerteten perfekten Körpern	11
Haupt, Otto, Bestimmung der zyklisch ordnungshomogenen ebenen Bogen (Erste Mitteilung)	14
Karamata, J., Ein Konvergenzsatz für trigonometrische Integrale	29
Braun, Hel, Über die Zerlegung quadratischer Formen in Quadrate	34

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgendeinem Grunde Textänderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von allen Abhandlungen 75 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Helmut Hasse, Göttingen, Mathematisches Institut, Bunsenstr. 3-5.

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35
Printed in Germany

Arithmetische Charakterisierung von algebraisch auflösbaren Körpern und Gleichungen von Primzahlgrad.

Von *Hans Reichardt* in Leipzig und *Udo Wegner* in Heidelberg.

Jedes Primideal eines algebraischen Zahlkörpers Ω zerfällt bekanntlich in einer galoisschen Erweiterung N in lauter verschiedene Primideale gleichen Grades, wenn es in N unverzweigt ist. Diese Tatsache ist charakteristisch für galoissche Körper; denn aus Sätzen von M. Bauer [1]) folgt sogar: Zerfallen alle Primideale von Ω, die in einer Erweiterung N von Ω unverzweigt sind und dort einen Primteiler ersten Grades besitzen, in N voll, so ist N/Ω galoissch. Wir wollen nun zeigen, wie man auch feinere Eigenschaften der algebraischen Struktur eines Erweiterungskörpers K/Ω in Zusammenhang mit dem Verhalten gewisser Idealmengen von Ω bringen kann, und zwar werden wir die auflösbaren Körper K/Ω von ungeradem Primzahlgrad l arithmetisch charakterisieren (I). Bei dieser Charakterisierung tritt eine gewisse Idealgruppe H von Ω auf, und es ist von Interesse, aus einfach zugänglichen Invarianten von K/Ω, etwa der Relativdiskriminante und der Art der Verzweigung ihrer Primteiler, Aussagen über H zu bekommen, vor allem darüber, welche Primstellen von Ω im Führer von H aufgehen (II). Noch weitergehende Aussagen können wir machen, wenn wir Ω als den Körper der rationalen Zahlen nehmen, und zwar können wir hier die Verzweigungsordnungen der Diskriminantenteiler des zu H gehörenden Klassenkörpers und seinen Grad bestimmen (III). In folgenden beiden Fällen gelingt die Bestimmung dieser Zahlen sogar schon aus der Diskriminante von K allein: 1. In K ist höchstens l höher verzweigt. 2. $l-1$ ist quadratfrei (IV).

Da man nach Ore [2]) aus einer erzeugenden Gleichung für K/Ω die Primidealzerlegung für K/Ω ablesen und die Relativdiskriminante bestimmen kann, erhalten wir damit zugleich eine arithmetische Charakterisierung der auflösbaren Gleichungen von Primzahlgrad. Die hier bewiesenen Sätze sind oft recht nützlich, wenn es sich darum handelt, die Nichtauflösbarkeit einer numerisch gegebenen irreduziblen Gleichung von Primzahlgrad nachzuweisen (V).

Zum Schluß bringen wir zwei Anwendungen von III auf absolut zyklische und auf absolut binomische Körper von Primzahlgrad (VI).

---

[1]) Vgl. den Hasseschen Bericht über Klassenkörpertheorie, Jahresbericht der D. M. V. Ergänzungsband 6, Teil II, S. 141.

[2]) Ö. Ore, Über den Zusammenhang zwischen den definierenden Gleichungen und der Idealtheorie in algebraischen Körpern. 1. Mitteilung: Math. Annalen **96** (1927), 2. Mitteilung: Math. Annalen **97** (1927).

I.

Satz 1. *Ist* K/Ω *auflösbar und vom Grad* l*, so existiert eine Idealgruppe* H *von* Ω *derart, daß alle und nur die in* K *unverzweigten Primideale aus* H *in* K *entweder voll zerfallen oder unzerlegt bleiben. Die Klassengruppe nach* H *ist zyklisch von in* $l-1$ *aufgehender Ordnung.*

Beweis. Die Galoisgruppe des zu K/Ω gehörenden Normalkörpers N ist bekanntlich eine lineare Gruppe und hat die Gestalt $\mathfrak{G} = \{S, T\}$ (geschweifte Klammern $\{\ldots\}$ bedeuten wie üblich die aus den eingeklammerten Elementen erzeugte Gruppe) mit

$$S^l = E, \quad T^m = E, \quad T^{-1}ST = S^\varkappa,$$

wobei $\varkappa$ mod l die Ordnung m hat, also $m \mid l-1$ ist. Die l Untergruppen der Ordnung m von $\mathfrak{G}$ sind untereinander konjugiert, wie man sich leicht überzeugt, so daß wir festsetzen können, $\{T\}$ möge im Sinn der Galoisschen Theorie dem Körper K zugeordnet sein. Den zu $\{S\}$ gehörenden Teilkörper von N bezeichnen wir mit Z. Wegen $\mathfrak{G}/\{S\} \cong \{T\}$ ist Z zyklisch vom Grad m. Wir zeigen nun, daß die im Sinn der Klassenkörpertheorie zu Z gehörende Idealgruppe H die behaupteten Eigenschaften besitzt:

1. $\mathfrak{p}$ sei ein in K unverzweigtes Primideal aus H. Dann zerfällt $\mathfrak{p}$ voll in Z; die Zerlegungsgruppe eines seiner Primteiler in N ist also in $\{S\}$ enthalten, und die Trägheitsgruppe ist $\{E\}$. Da $\{S\}$ die Primzahlordnung l hat, ist die Zerlegungsgruppe entweder $\{E\}$ oder $\{S\}$. Im ersten Fall zerfällt $\mathfrak{p}$ voll in N, also auch in K, während im zweiten Fall $\mathfrak{p}$ in N lauter Primteiler vom Grad l besitzt. Nun ist der Grad $[\mathsf{N} : \mathsf{K}] = m$ prim zu l, also besitzt $\mathfrak{p}$ auch in K lauter Primteiler vom Grad l. Da aber $[\mathsf{K} : \Omega] = l$ ist, bleibt $\mathfrak{p}$ unzerlegt in K.

2. Zerfällt $\mathfrak{p}$ in K voll, so ist es in K und damit auch im zugehörenden Normalkörper N unverzweigt und zerfällt auch in N voll; denn $\mathfrak{p}$ zerfällt dann auch in allen konjugierten zu K voll, also enthält der Zerlegungskörper eines jeden Primteilers von $\mathfrak{p}$ in N alle konjugierten zu K, also auch ihr Kompositum N. Daher ist N selbst Zerlegungskörper, d. h. $\mathfrak{p}$ zerfällt voll in N. Also zerfällt $\mathfrak{p}$ erst recht in Z voll, liegt also in H. — Bleibt dagegen $\mathfrak{p}$ in K unzerlegt, so bleibt $\mathfrak{p}$ in N unverzweigt und besitzt in N nur Primteiler, deren Grad durch l teilbar ist. Daher hat die Zerlegungsgruppe eine durch l teilbare Ordnung und ist zyklisch. Nun gibt es aber nur eine zyklische Untergruppe von $\mathfrak{G}$ mit durch l teilbarer Ordnung, nämlich $\{S\}$. Also ist $\{S\}$ die Zerlegungsgruppe, d. h. $\mathfrak{p}$ zerfällt in Z voll, liegt also in H.

3. Da Z/Ω zyklisch vom Grad m ist und m in $l-1$ aufgeht, ist die Klassengruppe nach H zyklisch von in $l-1$ aufgehender Ordnung.

Zur Umkehrung dieses Satzes brauchen wir folgenden Hilfssatz über Klassenkörper über Relativkörpern:

Hilfssatz 1. *Ist* $\overline{H}$ *eine Idealgruppe eines Erweiterungskörpers* Λ *von* Ω*, so ist der Klassenkörper* M *zu* $\overline{H}$ *dann und nur dann normal über* Ω*, wenn jedes in* M *unverzweigte Primideal von* Ω*, das in* Λ *einen in* $\overline{H}$ *liegenden Primteiler ersten Grades besitzt, in* Λ *voll zerfällt, und wenn alle seine Primteiler in* Λ *zu* $\overline{H}$ *gehören.*

Beweis. 1. M/Ω sei normal. Jedes in M unverzweigte Primideal $\mathfrak{p}$ von Ω, das in Λ einen in $\overline{H}$ liegenden Primteiler ersten Grades hat, besitzt in M einen Primteiler ersten Grades, zerfällt also voll in M, da M/Ω normal ist. Daher zerfällt $\mathfrak{p}$ erst recht in Λ voll, und seine Primteiler in Λ zerfallen weiter in M voll, gehören also zu $\overline{H}$.

2. Die Bedingung für die Primideale sei erfüllt. Jedes in M unverzweigte Primideal $\mathfrak{p}$ von Ω, das in M einen Primteiler ersten Grades besitzt, hat einen Primteiler ersten Grades in Λ, der seinerseits einen Primteiler ersten Grades in M besitzt, also zu $\bar{H}$ gehört. Nach der Voraussetzung zerfällt $\mathfrak{p}$ voll in Λ und alle seine Primteiler gehören zu $\bar{H}$, zerfallen also in M voll, also zerfällt $\mathfrak{p}$ selbst voll in M. Daraus folgt aber nach M. Bauer, daß M/Ω normal ist.

Für den wichtigen Spezialfall dieses Hilfssatzes, daß Λ/Ω normal ist, erhalten wir das bekannte Kriterium, wenn wir berücksichtigen, daß eine Idealgruppe durch die Menge ihrer Primideale ersten Grades eindeutig bestimmt ist: M/Ω ist dann und nur dann normal, wenn $\bar{H}$ bei den Automorphismen von Λ/Ω ungeändert bleibt. — Den Spezialfall von Hilfssatz 1, auf den wir uns zum Beweis der Umkehrung von Satz 1 nur stützen werden, formulieren wir besonders:

Hilfssatz 2. *Ist* Θ *Klassenkörper zu einer Idealgruppe* I *von* Ω, *so ist* $\Lambda\Theta/\Omega$ *dann und nur dann normal, wenn alle in* $\Lambda\Theta$ *unverzweigten Primideale aus* I, *die in* Λ *einen Primteiler ersten Grades besitzen, in* Λ *voll zerfallen.*

Den Beweis erbringen wir direkt, obwohl er sich auch mit Hilfe des Verschiebungssatzes der Klassenkörpertheorie auf Hilfssatz 1 zurückführen ließe:

1. $\Lambda\Theta/\Omega$ sei normal. Ist $\mathfrak{p}$ ein in $\Lambda\Theta$ unverzweigtes, zu I gehörendes Primideal von Ω, das einen Primteiler ersten Grades in Λ hat, so besitzt es auch in $\Lambda\Theta$ einen Primteiler ersten Grades, zerfällt also voll in $\Lambda\Theta$, da $\Lambda\Theta/\Omega$ nach Voraussetzung normal ist, und damit auch in Λ.

2. Die Bedingung für die Primideale sei erfüllt. Ist $\mathfrak{p}$ ein in $\Lambda\Theta$ unverzweigtes Primideal von Ω, das in $\Lambda\Theta$ einen Primteiler ersten Grades hat, so besitzt es auch in Λ und Θ Primteiler ersten Grades, liegt also in I und zerfällt daher nach Voraussetzung in Λ und Θ voll, also auch in $\Lambda\Theta$, woraus wieder nach M. Bauer folgt, daß $\Lambda\Theta/\Omega$ normal ist.

Satz 2. *Ist* K/Ω *vom Grad* l *und existiert eine Idealgruppe* I *von* Ω *derart, daß alle in* K *unverzweigten Primideale aus* I, *die einen Primteiler ersten Grades in* K *besitzen, in* K *voll zerfallen, so ist* K/Ω *auflösbar. Im Fall der Auflösbarkeit ist* $I \leqq H$.

Beweis. Ist Θ der Klassenkörper zu I, so ist $\Theta\mathsf{K}/\Omega$ nach Hilfssatz 2 normal. Nun ist entweder $\mathsf{K} \cap \Theta = \mathsf{K}$ oder Ω, da $[\mathsf{K}:\Omega]$ eine Primzahl ist. Im ersten Fall liegt K in Θ, ist also abelsch und damit auflösbar. In diesem Fall ist $\mathsf{Z} = \Omega$, da ja Z der kleinste zyklische Körper über Ω ist, für den KZ/Ω normal ist. Also ist H die Gruppe aller Ideale von Ω; $I \leqq H$ ist somit trivial. Im zweiten Fall ist, da Θ/Ω normal ist, $[\mathsf{K}\Theta:\Theta] = [\mathsf{K}:\Omega] = l$, also ist $\mathsf{K}\Theta$ zyklisch über dem über Ω abelschen Körper Θ. Die Galoisgruppe von $\mathsf{K}\Theta/\Omega$ ist daher metazyklisch, also ist K auflösbar. Da in diesem Fall K auf Grund der Voraussetzung nicht normal ist und $[\mathsf{K}\Theta:\Theta] = [\mathsf{N}:\mathsf{Z}] = l$ ist, ist Θ der maximale abelsche Teilkörper von $\mathsf{K}\Theta$, ebenso Z von N; denn $\mathsf{K}\Theta$ und N sind dann nicht abelsch über Ω. Da nun N als der Normalkörper zu K/Ω in $\mathsf{K}\Theta$ enthalten ist, ist $\mathsf{Z} \leqq \Theta$ und damit $I \leqq H$.

Die Sätze 1 und 2 liefern nun die folgende arithmetische Charakterisierung der auflösbaren Körper K/Ω von Primzahlgrad l:

K/Ω *ist dann und nur dann auflösbar, wenn eine solche Idealgruppe* I *von* Ω *existiert, daß alle in* K *unverzweigten Primideale aus* I, *die in* K *einen Primteiler ersten Grades besitzen, in* K *voll zerfallen.*

Jetzt erhebt sich die Frage, wie man im Fall der Auflösbarkeit eine solche Idealgruppe I oder gar die Idealgruppe H selbst bestimmen kann, ohne daß man dazu den

zugehörenden Normalkörper N heranzieht. Aus Satz 1 wissen wir, daß es dann jedenfalls eine solche Idealgruppe gibt, deren Klassengruppe zyklisch von in $l-1$ aufgehender Ordnung ist. Solche Idealgruppen gibt es nun unendlich viele, aber die Zahl der Möglichkeiten reduziert sich auf eine endliche Zahl, wenn wir fordern, daß im Führer außer unendlichen Primstellen nur Diskriminantenteiler von K/Ω aufgehen. Diese Forderung ist nämlich für H erfüllt; denn der zu K/Ω gehörende Normalkörper N hat die gleichen Diskriminantenteiler bezüglich Ω wie K selbst, also sind die Primteiler des Führers von H, die ja mit den Diskriminantenteilern von Z/Ω übereinstimmen, wegen $Z \leq N$ auch Diskriminantenteiler von K. Bildet man also den Durchschnitt aller Idealgruppen von Ω, deren Klassengruppen zyklisch von in $l-1$ aufgehender Ordnung sind und deren Führer außer unendlichen Primstellen nur Diskriminantenteiler von K/Ω enthalten, so erhält man eine Idealgruppe I, mit der die obige Charakterisierung gilt, da sie ja in H enthalten ist. Fügen wir jetzt zu I, wenn $I \neq H$ ist (was sicher dann der Fall ist, wenn die Klassengruppe nach I nicht zyklisch von in $l-1$ aufgehender Ordnung ist), ein Primideal hinzu, das in K voll zerfällt oder unzerlegt bleibt, so erhalten wir eine umfassendere Idealgruppe, die aber nach Satz 1 noch in H enthalten ist. Dieses Verfahren können wir solange fortsetzen, bis schließlich die Klassengruppe nach der zuletzt entstandenen Idealgruppe zyklisch von in $l-1$ aufgehender Ordnung ist. Ob diese Idealgruppe dann schon mit H übereinstimmt, können wir freilich in endlich viel Versuchen nicht mehr entscheiden, da wir ja untersuchen müßten, ob schon alle Primideale, die in K voll oder nicht zerfallen, in ihr enthalten sind. Jedoch können wir in dem Fall, daß der Grundkörper Ω der Körper der rationalen Zahlen ist, den Index m von H aus der Diskriminante und den Verzweigungsordnungen ihrer Primteiler bestimmen, wie unter III gezeigt werden wird, so daß wir hier zu der zuletzt entstandenen Idealgruppe noch so lange Primideale, die in K voll oder nicht zerfallen, hinzuzufügen haben, bis wir eine Idealgruppe mit dem Index m erhalten haben, die dann also mit H übereinstimmt.

II.

Wir wollen jetzt untersuchen, welche Diskriminantenteiler von K/Ω wirklich im Führer $\mathfrak{f}$ von H vorkommen. Da in $\mathfrak{f}$ im allgemeinen nicht alle Diskriminantenteiler auftreten werden, genügt es, an Stelle der oben herangezogenen Idealgruppen, deren Indizes in $l-1$ aufgehen und deren Führer nur aus Diskriminantenteilern von K/Ω bestehen, nur die zu nehmen, deren Indizes in $l-1$ aufgehen und deren Führer alle und nur die Primteiler von $\mathfrak{f}$ enthalten, und den Durchschnitt dieser Idealgruppen als I zu nehmen.

Es sei also K/Ω auflösbar, und $\mathfrak{d}_{K/\Omega}$ sei die Diskriminante für K/Ω.

Satz 3. 1. *Ist* $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{d}_{K/\Omega}$, *aber* $\mathfrak{p}^{l-1} \nmid \mathfrak{d}_{K/\Omega}$, *so ist* $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}$.

2. *Ist* $\mathfrak{d}_{K/\Omega}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}^{l-1}$ *und* $\mathfrak{p} \nmid 2$, *so ist* $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}$.

3. *Ist* $\mathfrak{d}_{K/\Omega}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}^{l-1}$ *und* $\mathfrak{p} \mid 2$, *so ist dann und nur dann* $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}$, *wenn* $\mathfrak{p}$ *in* K *voll verzweigt ist.*

4. *Ist* $p^l \mid \mathfrak{d}_{K/\Omega}$ *und* $\mathfrak{p} \nmid l$, *so ist* $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}$.

5. *Ist* $\mathfrak{p}^l \mid \mathfrak{d}_{K/\Omega}$ *und* $\mathfrak{p} \mid l$, *so ist dann und nur dann* $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}$, *wenn* $\mathfrak{d}_{K/\Omega}(\mathfrak{p})$ *eine* $(l-1)$*-te Potenz ist.*

Beweis. Die folgende Tabelle über die Diskriminantenteiler erhält man ohne weiteres aus der allgemeinen Theorie der Trägheitsgruppe $\mathfrak{T}$ bei Benutzung der bekannten Eigenschaften von $\mathfrak{G}$ (vgl. auch die große Tabelle bei Porusch [3]).

[3]) I. Porusch, Die Arithmetik in Zahlkörpern, deren zugehörige Galoissche Körper spezielle metabelsche Gruppen besitzen, auf klassenkörpertheoretischer Grundlage, Math. Zeitschrift **37** (1933).

	$\mathfrak{p}$	$\mathfrak{T}$	$\mathfrak{d}_{K/\Omega}$	$\mathfrak{d}_{Z/\Omega}$
1.	$\mathfrak{p} \nmid l$	$\{S\}$	$\mathfrak{p}^{l-1}$	1
2.	$\mathfrak{p} \nmid \frac{m}{k}$	$\{T^k\}$	$\mathfrak{p}^{(l-1)\left(1-\frac{k}{m}\right)}$	$\mathfrak{p}^{m-k}$
3.	$\mathfrak{p} \mid l$	$\{S, T^k\}$	$\mathfrak{p}^{(l-1)\left(1+\frac{kv}{m}\right)}$	$\mathfrak{p}^{m-k}$
4.	$\mathfrak{p} \mid \frac{m}{k}$	$\{T^k\}$	$\mathfrak{p}^{(l-1)\left(1+\frac{k}{m}(s-1)\right)}$	$\mathfrak{p}^{m-k+ks}$

Darin bedeutet $\mathfrak{T}$ die Trägheitsgruppe eines der Primteiler von $\mathfrak{p}$ in N und $\mathfrak{d}_{Z/\Omega}$ die Diskriminante für Z/Ω. In den beiden ersten Spalten sind die sämtlichen möglichen Verzweigungstypen (abgesehen von den konjugierten) aufgezählt. Dabei ist $k \mid m$ und in der zweiten und vierten Zeile $k < m$. In den beiden letzten Spalten stehen die Beiträge von $\mathfrak{p}$ zu $\mathfrak{d}_{K/\Omega}$ und $\mathfrak{d}_{Z/\Omega}$. In Zeile 3 ist v die Anzahl der von $\{E\}$ verschiedenen Verzweigungsgruppen. Wie bei Porusch beweist man auch hier bei beliebigem Grundkörper Ω im Anschluß an Speiser $\left(v, \frac{m}{k}\right) = 1$. In Zeile 4 ist $s = \sum_{i=1}^{\infty} (p^{r_i} - 1)$, wobei p^{r_i} die Ordnung der i-ten Verzweigungsgruppe ist.

Bei den nun folgenden einzelnen Beweisen erwähnen wir nicht jedesmal besonders, daß $\mathfrak{f}$ genau die gleichen Primteiler wie $\mathfrak{d}_{Z/\Omega}$ enthält.

1. $\mathfrak{p}^{l-1} \nmid \mathfrak{d}_{K/\Omega}$ kommt nur in der Zeile 2 vor. In dieser ist $k < m$, also $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}$.

2. Ist $\mathfrak{d}_{K/\Omega}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}^{l-1}$ und $\mathfrak{p} \nmid 2$, so liegt Zeile 1 vor; denn in Zeile 2 und 3 sind die $\mathfrak{p}$-Beiträge zu $\mathfrak{d}_{K/\Omega}$ kleiner oder größer als $\mathfrak{p}^{l-1}$, und in Zeile 4 kann nur dann $\mathfrak{d}_{K/\Omega}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}^{l-1}$ sein, wenn $s = 1$, also $p = 2$ ist. Also ist $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}$.

3. Ist $\mathfrak{d}_{K/\Omega}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}^{l-1}$ und $\mathfrak{p} \mid 2$, so liegt Zeile 1 oder 4 vor. Ist $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}$, so liegt Zeile 1 vor, denn in Zeile 4 ist $m - k + ks > 0$. Also ist dann $\mathfrak{T} = \{S\}$, d. h. $\mathfrak{p}$ ist in K voll verzweigt. Ist dagegen $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}$, so liegt Zeile 4 vor, also ist dann $\mathfrak{T} = \{T^k\}$, d. h. $\mathfrak{p}$ ist in K nicht voll verzweigt.

4. $\mathfrak{p}^l \mid \mathfrak{d}_{K/\Omega}$ und $\mathfrak{p} \nmid l$ kommt nur in Zeile 4 vor, also ist $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}$.

5. $\mathfrak{p}^l \mid \mathfrak{d}_{K/\Omega}$ und $\mathfrak{p} \mid l$ kommt nur in Zeile 3 vor. Ist $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}$, so muß $m = k$ sein, also ist $\mathfrak{d}_{K/\Omega}(\mathfrak{p})$ eine $(l-1)$-te Potenz. Ist umgekehrt $\mathfrak{d}_{K/\Omega}(\mathfrak{p})$ eine $(l-1)$-te Potenz, so ist $\frac{kv}{m}$ ganz. Nun ist $k \mid m$ und $\left(v, \frac{m}{k}\right) = 1$. $\frac{kv}{m}$ kann also nur dann ganz sein, wenn $\frac{k}{m} = 1$ ist. Dann ist aber $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}$.

Das Entsprechende für die unendlichen in $\mathfrak{f}$ aufgehenden Primstellen erhalten wir, wenn wir den folgenden Satz auf alle zu K absolut konjugierten Körper anwenden:

Satz 3_∞. *Ist Ω reell, so ist* Z *dann und nur dann reell, wenn alle konjugierten zu* K *bezüglich Ω reell sind.*

Beweis. Da l ungerade ist, ist mindestens einer dieser konjugierten, etwa K selbst, reell. Ist also Z reell, so ist N = KZ reell, also sind alle konjugierten zu K/Ω reell. Ist das umgekehrt der Fall, so ist N und damit auch Z reell. (Dieser Satz ist insofern vom gleichen Typ wie die Fälle 1, 2, 4, 5 von Satz 3 und von anderem Typ als Fall 3, als die Tatsache nicht herangezogen wird, daß die Zahl der reellen konjugierten zu K entweder l oder 1 ist.)

III.

Von nun an sei der Grundkörper Ω der Körper P der rationalen Zahlen. Wir setzen $\mathfrak{d}_{\mathsf{K}/\Omega} = d_{\mathsf{K}}$ und $\mathfrak{d}_{\mathsf{Z}/\Omega} = d_{\mathsf{Z}}$ (die Diskriminanten werden wir hier immer als Ideale auffassen, also das Vorzeichen nicht berücksichtigen.) Weiter seien $p_1, \ldots, p_n$ die Primteiler von d_{K}, für die nicht Zeile 1 vorliegt. (Ob für einen Diskriminantenteiler Zeile 1 vorliegt oder nicht, kann man i. a. aus seinem Beitrag zu d_{K} ablesen, nur im Fall $d_{\mathsf{K}} = 2^{l-1}$ muß man nachprüfen, ob 2 in K voll verzweigt ist oder nicht, wie aus dem Beweis von Satz 3 hervorgeht.) Ist schließlich k_ν die zu p_ν im Sinn der Tabelle gehörende Zahl k, so setzen wir $\varkappa_\nu = k_\nu \cdot \dfrac{l-1}{m}$.

Satz 4. *Ist* $n = 0$, *so ist* $m = 1$. *Ist* $n > 0$, *so ist* $m = \dfrac{l-1}{(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n)}$.

Beweis. $\mathfrak{G}$ ist das Kompositum aller seiner Trägheitsgruppen, da N ein absoluter Normalkörper ist. Ist also $n = 0$, so sind alle Trägheitsgruppen $\{S\}$, also ist $\mathfrak{G} = \{S\}$, d. h. N ist zyklisch. Also ist $\mathsf{K} = \mathsf{N}$ und $\mathsf{Z} = \mathsf{P}$, also $m = 1$. Es sei nun $n > 0$. Dann gibt es Trägheitsgruppen der Form $\{T^k\}$ oder $\{S, T^k\}$ nebst ihren konjugierten und ev. noch $\{S\}$. Nun ist $\{S, T^k\}$ invariant in $\mathfrak{G}$ enthalten; das Kompositum der konjugierten zu $\{T^k\}$ ist, wie man sich leicht überzeugt, $\{S, T^k\}$, also ist das Kompositum aller Trägheitsgruppen $\{S, T^{k_1}, \ldots, T^{k_n}\} = \{S, T^t\}$ mit $t = (k_1, \ldots, k_n)$. Diese Gruppe stimmt also mit $\mathfrak{G}$ überein. Wegen $t \mid m$ ist daher $t = 1$, also

$$\frac{l-1}{(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n)} = \frac{m}{(k_1, \ldots, k_n)} = m.$$

Damit ist also die Bestimmung von m zurückgeführt auf die Bestimmung des zu jedem Primteiler p von d_{K} gehörenden Quotienten $\dfrac{m}{k}$. Diesen Quotienten kann man aber i. a., d. h. wenn nicht Zeile 4 vorliegt, unmittelbar aus dem Beitrag von p zu d_{K} ablesen, wie ein Blick auf die Tabelle lehrt, wobei man bei Zeile 3 nur noch $\left(v, \dfrac{m}{k}\right) = 1$ zu berücksichtigen hat. Liegt jedoch Zeile 4 vor, so läßt sich $\dfrac{m}{k}$ i. a. nicht aus $d_{\mathsf{K}}(p)$ ablesen, weil $s - 1$ nicht notwendig zu $\dfrac{m}{k}$ prim ist. Hier gelingt die Bestimmung von $\dfrac{m}{k}$ erst auf Grund der Primidealzerlegung von p in K. Aus der Struktur von $\mathfrak{G}$ folgt nämlich unmittelbar (vgl. auch Porusch), daß $p = \mathfrak{A}\mathfrak{B}^{\frac{m}{k}}$ mit ganzen teilerfremden quadratfreien Idealen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ aus K ist.

IV.

Aus dem soeben Gesagten folgt sofort, daß man *in dem Fall, daß höchstens für l eine höhere Verzweigung vorliegt, die Zahl m unmittelbar aus d_{K} allein bestimmen kann.* Ob keine höhere Verzweigungen außer etwa l vorliegen, kann man i. a. aus der Gestalt von d_{K} ablesen. Ist nämlich $p \neq 2$, so liegt eine höhere Verzweigung dann und nur dann vor, wenn $p^l \mid d_{\mathsf{K}}$. Ebenso ist 2 höher verzweigt, wenn $2^l \mid d_{\mathsf{K}}$, und nur einfach verzweigt, wenn $2^{l-1} \nmid d_{\mathsf{K}}$. Ist schließlich $d_{\mathsf{K}}(2) = 2^{l-1}$, so ist 2 dann und nur dann einfach verzweigt, wenn 2 in K voll verzweigt ist. All dies geht unmittelbar aus dem Beweis von Satz 3 hervor.

Noch in einem anderen Fall läßt sich m unmittelbar aus d_{K} ablesen, nämlich wenn

$l-1$ *quadratfrei ist.* Wie wir gesehen haben, ist dazu die Bestimmung der Zahlen $\frac{m}{k}$ nötig, und diese ergeben sich ohne weiteres aus d_{K}, wenn die ersten drei Zeilen vorliegen. Wir haben uns also nur noch mit Zeile 4 zu beschäftigen.

Es sei also zunächst $p \neq 2$ und $p^l | d_{\mathsf{K}}$, denn das ist bei $p \neq 2$ gleichbedeutend damit, daß Zeile 4 vorliegt. m ist wegen $m | l-1$ quadratfrei, p ist also wegen $p \left| \frac{m}{k} \right.$ in dem Teilkörper Z_p des Grades p von Z verzweigt. Also ist $d_{\mathsf{Z}_p}(p) = p^{2p-2}$. In Z_p hat p den einzigen Primteiler $(p)^{\frac{1}{p}}$. Dieser hat in Z die Verzweigungsordnung $\frac{m}{pk}$; denn p hat in N die Verzweigungsordnung $\frac{m}{k}$, und für N/Z findet wegen $(l, m) = 1$ keine Verzweigung von p statt. Nun ist $p \nmid \frac{m}{pk}$, also ist

$$\mathfrak{d}_{\mathsf{Z}/\mathsf{Z}_p}\left((p)^{\frac{1}{p}}\right) = (p)^{\frac{1}{p} \cdot \frac{m}{p} \cdot \frac{pk}{m}\left(\frac{m}{pk}-1\right)}$$

oder auch

$$\mathfrak{d}_{\mathsf{Z}/\mathsf{Z}_p}(p) = p^{\frac{1}{p}\left(\frac{m}{p}-k\right)}.$$

Nun ist

$$d_{\mathsf{Z}} = d_{\mathsf{Z}_p}^{\frac{m}{p}} N_{\mathsf{Z}_p/\mathsf{P}}(\mathfrak{d}_{\mathsf{Z}/\mathsf{Z}_p}) = d_{\mathsf{Z}_p}^{\frac{m}{p}} \mathfrak{d}_{\mathsf{Z}/\mathsf{Z}_p}^{p},$$

also

$$d_{\mathsf{Z}}(p) = p^{2m - \frac{2m}{p} + \frac{m}{p} - k} = p^{2m - \frac{m}{p} - k},$$

und daraus folgt, da nach Zeile 4 $d_{\mathsf{K}}^{l-1}(p) = d_{\mathsf{K}}^{m}(p)$ ist,

$$d_{\mathsf{K}}(p) = p^{(l-1)\left(2 - \frac{1}{p} + \frac{k}{m}\right)},$$

also ist $\frac{m}{k}$ durch $d_{\mathsf{K}}(p)$ eindeutig bestimmt.

Wir wenden uns nun der 2 zu und zeigen zunächst, daß wir ohne genauere Kenntnis des Verzweigungsverhaltens der 2 in K entscheiden können, ob eine höhere Verzweigung vorliegt oder nicht. Jedenfalls liegt eine solche vor, wenn $2^l | d_{\mathsf{K}}$ ist (s. Tabelle). Es kann aber auch dann noch eine höhere Verzweigung auftreten, wenn $d_{\mathsf{K}}(2) = 2^{l-1}$ ist. Im Fall der höheren Verzweigung ist dann $2 \left| \frac{m}{k} \right.$, also ist 2 in dem quadratischen Teilkörper Z_2 von Z verzweigt, und es ist $d_{\mathsf{Z}_2}(2) = 2^w$ mit $w = 2$ oder 3. Nun ist die 2 in keinem absolut abelschen Körper ungeraden Grades verzweigt (es läge ja dann eine einfache Verzweigung vor, die Verzweigungsordnung müßte also in $2^1 - 1$ aufgehen), also ist $(2)^{\frac{1}{2}}$ für Z/Z_2 unverzweigt. Daher ist $d_{\mathsf{Z}}(2) = d_{\mathsf{Z}_2}(2)^{\frac{m}{2}} = 2^{w\frac{m}{2}}$, woraus wieder wie oben $d_{\mathsf{K}}(2) = 2^{w\frac{l-1}{2}}$ folgt. Anderseits ist $d_{\mathsf{K}}(2) = 2^{l-1}$, also ist $w = 2$. Nun ist ganz allgemein $\frac{m}{k}$ die Verzweigungsordnung von p in Z; denn die Verzweigungsordnung in N ist $\frac{m}{k}$ oder $\frac{ml}{k}$, und es ist $[\mathsf{N} : \mathsf{Z}] = l$. Wir behaupten nun zunächst: Gibt es keine ungeraden p mit geraden $\frac{m}{k}$ und ist K total reell, so liegt für 2 keine höhere Verzweigung

vor. Wäre das nämlich der Fall, so wäre Z_2 reell. Da nun alle ungeraden p ungerade Verzweigungsordnungen in Z haben, sind sie in Z_2 unverzweigt. Wegen $w = 2$ wäre also $d_{\mathsf{Z}_1} = 4$, was aber nicht geht, weil Z_2 reell ist. Eine ganz entsprechende Betrachtung liefert: Gibt es keine ungeraden p mit geraden $\frac{m}{k}$ und ist K nicht total reell, so liegt für 2 eine höhere Verzweigung vor. Betrachten wir nun den Fall, daß Primzahlen p mit geraden Zahlen $\frac{m}{k}$ vorkommen. P sei ihr Produkt. Da entweder die 2 in Z_2 unverzweigt ist oder aber $w = 2$ ist, ist $\mathsf{Z}_2 = \mathsf{P}(\sqrt{P})$ oder $\mathsf{P}(\sqrt{-P})$. Das Vorzeichen hängt nun davon ab, ob K total reell ist oder nicht. Dieses Vorzeichen entscheidet aber darüber, ob 2 in Z_2 verzweigt ist oder nicht. — Wir haben somit im Fall $d_{\mathsf{K}}(2) = 2^{l-1}$ ein einfaches Mittel gefunden, festzustellen, ob für 2 eine höhere Verzweigung vorliegt oder nicht. — Liegt nun für 2 Zeile 4 vor, so ist 2 in Z verzweigt. Daraus folgt dann schon $\frac{m}{k} = 2$, da ja $\frac{m}{k}$ die Verzweigungsordnung von 2 in Z ist und da, wie schon gesagt, 2 in keinem absolut abelschen Körper ungeraden Grades verzweigt ist.

Damit haben wir also gesehen, daß, wenn $l - 1$ quadratfrei ist, die Zahlen $\frac{m}{k}$ und damit m selbst aus d_{K} abgelesen werden können, wobei nur im Fall $d_{\mathsf{K}}(2) = 2^{l-1}$ noch zu berücksichtigen ist, ob K total reell ist oder nicht.

V.

Wir zeigen jetzt an einem Beispiel, wie man häufig in einfacher Weise auf Grund der hier bewiesenen Sätze die Nichtauflösbarkeit einer gegebenen irreduziblen Gleichung von Primzahlgrad nachweisen kann. Die Gleichung

$$x^5 - 5ax + 191a = 0 \quad \text{mit} \quad a = 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 29 \cdot 37$$

ist nach Eisenstein irreduzibel. Ihre Diskriminante berechnet man leicht zu $5^5 a^4$. Da die Gleichung also für jeden Diskriminantenteiler eine Eisenstein-Gleichung ist, ist $5^5 a^4$ auch schon die zugehörende Körperdiskriminante [4]). Wir nehmen nun an, die Gleichung sei auflösbar. Die Diskriminantenteiler außer 5 gehören dann zu Zeile 1 der Tabelle; in d_{Z} kann also nur 5 aufgehen. Für 5 liegt Zeile 3 vor. Aus $d_{\mathsf{K}}(5) = 5^9$ ergibt sich $4\left(1 + \frac{kv}{m}\right) = 9$, $\frac{kv}{m} = \frac{5}{4}$; aus $\left(v, \frac{m}{k}\right) = 1$ und $m \mid 4$ folgt also $v = 5$, $\frac{m}{k} = 4$, und daraus ergibt sich schon $m = 4$, $k = 1$. Es ist Z also ein zyklischer Körper vom Grad 4, in dem nur 5 Diskriminantenteiler ist. Daraus folgt aber, daß Z der Körper der 5. Einheitswurzeln ist. (Daß Z nicht reell ist, stimmt auch damit noch überein, daß die Wurzeln der gegebenen Gleichungen nicht alle reell sind (Satz 3!); es ist nämlich nur eine reell, wie man leicht sieht.) Die in H liegenden Primzahlen sind also genau die, die $\equiv 1 \bmod 5p_\infty$ sind. Daher muß mod einer jeden solchen Primzahl die gegebene Gleichung nach Satz 1 entweder voll zerfallen oder unzerlegt bleiben. Das ist aber schon für 11 nicht der Fall; denn es ist

$$x^5 - 5ax + 191a \equiv x^5 + 4x - 1 \equiv (x + 5)(x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 4x + 2) \pmod{11},$$

wobei der zweite Faktor keine Nullstelle mod 11 hat. Daher ist die gegebene Gleichung nicht auflösbar.

---

[4]) H. Reichardt, Arithmetische Theorie der kubischen Körper als Radikalkörper, Monatshefte f. Math. u. Phys. **40** (1933), Hilfssatz 3.

VI.

Die beiden nun noch folgenden Sätze sind nur implizite Anwendungen von III. l sei wieder eine Primzahl $\neq 2$.

Satz 5. *Dann und nur dann ist ein auflösbarer Körper* K/P *l-ten Grades zyklisch, wenn er total reell ist und wenn seine Diskriminante die Form* a^{l-1} *oder* $l^{2(l-1)}\,a^{l-1}$ *mit quadratfreiem, zu l primem a hat.*

Beweis. Daß ein zyklischer Körper vom Grad l über P diese Eigenschaften hat, ist bekannt. Es möge also umgekehrt der auflösbare Körper K/P diese Eigenschaften haben. Alle in a aufgehenden Primzahlen $\neq 2$ gehören zu Zeile 1 der Tabelle, liefern also keinen Beitrag zu d_Z. Ebenso ist $d_\mathsf{Z}(l) = 1$; denn im Fall $d_\mathsf{K} = a^{l-1}$ ist ja sogar $l \nmid d_\mathsf{K}$, und im Fall $d_\mathsf{K}(l) = l^{2(l-1)}$ ist $d_\mathsf{Z}(l) = 1$ nach Satz 3_5. Ist also a ungerade, so ist damit schon $d_\mathsf{Z} = 1$, also $\mathsf{Z} = \mathsf{P}$ gezeigt, d. h. K ist selbst schon normal, also zyklisch. Ist dagegen a gerade, so ist $d_\mathsf{K}(2) = 2^{l-1}$. Wir wollen zeigen, daß nicht Zeile 4, sondern Zeile 1 vorliegt, woraus dann wieder $d_\mathsf{Z} = 1$ und damit die Richtigkeit unserer Behauptung folgt. Läge nämlich Zeile 4 vor, so würde aus $d_\mathsf{K}(2) = 2^{l-1}$ nach der Tabelle

$$l - 1 = (l-1)\left(l + \frac{k}{m}(s-1)\right)$$

folgen, also $s = 1$, $p^{r_i} = 2$. Da 2 in Z der einzige Diskriminantenteiler wäre, wäre 2 in Z voll verzweigt und der Grad von Z wäre eine Potenz von 2. Also würde Z mit seinem Verzweigungskörper übereinstimmen, folglich wäre Z vom Grad $m = p^{r_1} = 2$, $k = 1$. Nach der Tabelle wäre dann $d_\mathsf{Z} = 4$. Daraus würde aber $\mathsf{Z} = \mathsf{P}(\sqrt{-1})$ folgen, und das steht im Widerspruch zur Voraussetzung: K total reell.

Wir zeigen nun zum Schluß, wie man die Ausnahmestellung der 2 in einem kürzlich von U. Wegner [5]) bewiesenen Satz beseitigen kann, indem man nämlich, wie es ganz natürlich erscheint, die Realitätsverhältnisse mit berücksichtigt.

Satz 6. *Ist* K/P *auflösbar, vom Grad l und nicht total reell, hat* d_K *eine der drei Formen* $l^{l-2}\,a^{l-1}$ oder $l^{l}\,a^{l-1}$ oder $l^{2l-1}\,a^{l-1}$ *mit quadratfreiem, zu l primem a und ist überdies im ersten dieser drei Fälle $l-1$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Ordnungen der in a aufgehenden Primzahlen mod l, so ist* K *binomisch.*

Beweis. Wir haben hier nur zu zeigen, daß unter den angegebenen Bedingungen $\mathsf{Z} = \mathsf{P}(\zeta)$ mit $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{l}}$ ist; wenn das gezeigt ist, geht der Beweis genau wie a. a. O. weiter.

Wir zeigen zunächst $m = l - 1$, $k = 1$. Das ergibt sich schon aus dem Beitrag von l zu d_K. Im ersten Fall folgt nämlich daraus nach der Tabelle $\frac{m}{k} = l - 1$, im zweiten Fall $\frac{m}{kv} = l - 1$, und im dritten Fall $\frac{m}{kv} = \frac{l-1}{l}$. Daraus ergibt sich aber wegen $k \mid m \mid l - 1$ in allen Fällen $m = l - 1$, $k = 1$. Z hat also den Grad $l - 1$, und l ist in Z voll verzweigt. Die in a aufgehenden ungeraden Primzahlen liefern nach Satz 3 keinen Beitrag zu d. Ist also a ungerade, so ist l der einzige Diskriminantenteiler von Z, und daraus folgt, daß Z der Körper der l-ten Einheitswurzeln ist. Ist dagegen a gerade, so haben wir noch zu zeigen, daß für 2 Zeile 1 vorliegt; denn dann folgt wieder, daß Z nur den Diskriminantenteiler l hat, daß also $\mathsf{Z} = \mathsf{P}(\zeta)$ ist.

---

[5]) U. Wegner, Bestimmung eines auflösbaren Körpers von Primzahlgrad aus der Form seiner Diskriminante, dieses Journal **176** (1936).

Wir nehmen also das Gegenteil an, 2 sei in Z verzweigt. Dann liegt wegen $d_{\mathsf{K}}(2) = 2^{l-1}$ Zeile 4 mit $s = 1$ vor, also ist $d_{\mathsf{Z}}(2) = 2^{l-1}$. 2 und l sind dann die einzigen Diskriminantenteiler von Z, also ist, da l in Z voll und einfach verzweigt ist, $d_{\mathsf{Z}} = 2^{l-1} l^{l-2}$. Δ sei der Trägheitskörper von 2 in Z und habe den Grad t. Er ist der größte Teilkörper von Z, in dem nur l verzweigt ist. Daher ist Δ in $\mathsf{P}(\zeta)$ enthalten, und es ist $\Delta = \mathsf{Z} \cap \mathsf{P}(\zeta)$. Also hat $\mathsf{Z}(\zeta)$ den Grad $\frac{(l-1)^2}{t}$. Da dieser Grad nicht durch l teilbar ist, ist die Trägheitsgruppe von l in $\mathsf{Z}(\zeta)$ zyklisch, also hat sie, da l in Z und $\mathsf{P}(\zeta)$ die Verzweigungsordnungen $l-1$ hat, die Ordnung $l-1$. (Diese Ordnung ist ja das kleinste gemeinsame Vielfache der beiden Verzweigungsordnungen, weil die Trägheitsgruppe zyklisch ist.) Der Trägheitskörper T von l in $\mathsf{Z}(\zeta)$ ist also vom Grad $\frac{l-1}{t}$, und in T ist nur 2 Diskriminantenteiler. Es ist nun einerseits

$$d_{\mathsf{Z}(\zeta)} = d_{\mathsf{Z}}^{\frac{l-1}{t}} \mathfrak{d}_{\mathsf{Z}(\zeta)/\mathsf{Z}}^{l-1},$$

also, da 2 für $\mathsf{Z}(\zeta)/\mathsf{Z}$ unverzweigt ist,

$$d_{\mathsf{Z}(\zeta)}(2) = d_{\mathsf{Z}}(2)^{\frac{l-1}{t}} = 2^{\frac{(l-1)^2}{t}}.$$

Anderseits ist $\mathsf{T}(\zeta)$, da die Diskriminanten von T und $\mathsf{P}(\zeta)$ prim zueinander sind, vom Grad $\frac{l-1}{t} \cdot (l-1)$, also ist $\mathsf{Z}(\zeta) = \mathsf{T}(\zeta)$. Daraus folgt

$$d_{\mathsf{Z}(\zeta)} = d_{\mathsf{P}(\zeta)}^{\frac{l-1}{t}} d_{\mathsf{T}}^{l-1},$$

also wegen $d_{\mathsf{T}} = d_{\mathsf{T}}(2)$ und $2 \nmid d_{\mathsf{P}(\zeta)}$

$$d_{\mathsf{T}} = d_{\mathsf{Z}(\zeta)}(2)^{\frac{1}{l-1}} = 2^{\frac{l-1}{t}}.$$

Es sei nun Σ ein in T enthaltener quadratischer Körper. Dann ist

$$d_{\mathsf{T}} = d_{\Sigma}^{\frac{l-1}{2t}} \mathfrak{d}_{\mathsf{T}/\Sigma}^2 = 2^{\frac{i-1}{t} \cdot \frac{w}{2}} \cdot \mathfrak{d}_{\mathsf{T}/\Sigma}^2$$

mit $w = 2$ oder 3. Wegen $d_{\mathsf{T}} = 2^{\frac{l-1}{t}}$ ist also $w = 2$, $\mathfrak{d}_{\mathsf{T}/\Sigma} = 1$. Daraus folgt aber $\Sigma = \mathsf{T} = \mathsf{P}(i)$; denn $w = 2$ liefert $d_{\Sigma} = 4$, also $\Sigma = \mathsf{P}(i)$, und da T nur 2 als Diskriminantenteiler hat und absolut normal ist, ist 2 in T voll verzweigt, also hat T über keinem von T verschiedenen Teilkörper die Diskriminante 1, und daraus folgt $\mathsf{T} = \Sigma$. Daher ist $\mathsf{Z}(\zeta) = \mathsf{T}(\zeta) = \mathsf{P}(i, \zeta)$. Dieser Körper ist abelsch vom Typ $(2, l-1)$, enthält also drei Teilkörper vom Grad $l-1$. Einer davon ist reell, und die beiden anderen sind $\mathsf{P}(\zeta)$ und $\mathsf{P}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}, i\right)$. Da $\mathsf{Z} \neq \mathsf{P}(\zeta)$ (in Z ist ja nach Annahme 2 verzweigt) und $\mathsf{Z} \neq \mathsf{P}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}, i\right)$ ist $\left(\text{denn in } \mathsf{P}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}, i\right) \text{ hat } l \text{ nur die Verzweigungsordnung } \frac{l-1}{2}\right)$, ist Z der genannte reelle Körper. Das widerspricht aber der Voraussetzung: K nicht total reell.

Eingegangen 29. Januar 1937.

Divisionsalgebren über diskret bewerteten perfekten Körpern.

Von *Tadasi Nakayama* in Osaka (Japan).

Vor kurzem erschien eine Arbeit von Herrn Witt [1]), die sich mit der Struktur der Divisionsalgebren über einem diskret bewerteten perfekten Körper mit vollkommenem Restklassenkörper beschäftigt. Dort sind, insbesondere beim Existenzbeweis einer unverzweigten Divisionsalgebra mit einer vorgegebenen Restklassendivisionsalgebra, die Teichmüllerschen multiplikativen Repräsentanten benutzt. Man kann aber ihre Benutzung vermeiden, und demnach zeigen, daß die Hauptresultate der Arbeit auch im Falle eines unvollkommenen Restklassenkörpers unter einer gewissen Einschränkung gültig sind.

k sei ein diskret bewerteter perfekter Körper, $\mathfrak{k}$ der (*nicht notwendig vollkommene*) Restklassenkörper von k.

Satz 1 [2]). *Ist $\mathfrak{S}$ eine beliebig vorgegebene Divisionsalgebra über $\mathfrak{k}$, so gibt es stets (mindestens) eine unverzweigte Divisionsalgebra S über k mit der Restklassendivisionsalgebra $\mathfrak{S}$. Besitzt $\mathfrak{S}$ ein über $\mathfrak{k}$ separables Zentrum, so ist S durch $\mathfrak{S}$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

Satz 2. *D sei eine normale Divisionsalgebra über k, deren Restklassendivisionsalgebra $\mathfrak{D}$ ein über $\mathfrak{k}$ separables Zentrum $\mathfrak{Z}$ besitzt. Dann wird die Algebrenklasse von D bei fester Wahl des Primelementes π in k eindeutig durch ein Produkt $S \times (\pi, Z, \sigma)$ dargestellt, wo S eine unverzweigte (normale) Divisionsalgebra über k mit einer über $\mathfrak{k}$ normalen Restklassenalgebra und Z ein unverzweigter zyklischer Körper über k mit über $\mathfrak{k}$ separablem Restklassenkörper und mit dem erzeugenden Automorphismus σ ist. $\mathfrak{Z}$ ist zum Restklassenkörper von Z isomorph, ist also zyklisch über $\mathfrak{k}$.*

Wir schicken einige Hilfsbetrachtungen voraus. D/k sei eine normale Divisionsalgebra. n, r, e seien Grad, Restklassenrang, Verzweigungsordnung von D/k, also $n^2 = er$ oder auch $\frac{n}{e} = \frac{r}{n}$.

Hilfssatz 1. *n ist durch e teilbar, geht also in r auf.*

Der Grad des Körpers $k(\Pi)/k$, der durch Adjunktion eines Primelementes Π von D entsteht, ist einerseits ein Teiler von n, andrerseits jedenfalls ein Vielfaches von e. Daraus folgt die Behauptung unmittelbar.

---

[1]) E. Witt, Schiefkörper über diskret bewerteten Körpern, Crelle **176** (1936), 153—156.

[2]) Diesen Satz 1 und den unten folgenden Satz 3 habe ich unabhängig von Herrn Witt gefunden. Mein ursprünglicher Beweis des Satzes 3 war aber sehr kompliziert. Die Anregung zu der vorliegenden neuen Formulierung verdanke ich Herrn Hasse, dem ich hier meinen besten Dank aussprechen möchte.

Hilfssatz 2. *Das Zentrum* $\mathfrak{Z}$ *der Restklassendivisionsalgebra* $\mathfrak{D}$ *von* D *sei separabel über* $\mathfrak{k}$. D *enthält dann mindestens einen über* k *unverzweigten maximalen Teilkörper mit über* $\mathfrak{k}$ *separablem Restklassenkörper.*

$\mathfrak{W}$ sei ein über $\mathfrak{Z}$, also auch über $\mathfrak{k}$, separabler maximaler Teilkörper von $\mathfrak{D}$ [3]). Es sei $\mathfrak{W} = \mathfrak{k}(\mathfrak{w})$, und w sei ein Vertreter der Restklasse $\mathfrak{w}$. Der Restklassenkörper von $k(w)$ ist dann $\mathfrak{W}$. W sei der Trägheitskörper von $k(w)/k$. Dieser Körper W ist ein maximaler Teilkörper von D, also $k(w) = W$. Denn andernfalls besäße die Algebra $V(W)$ der sämtlichen mit W elementweise vertauschbaren Elemente von D über W einen größeren Grad als 1. Dann enthielte die Restklassendivisionsalgebra von $V(W)$, wie man aus Hilfssatz 1 leicht sieht, einen echten Oberkörper von $\mathfrak{W}$, was der Maximalität von $\mathfrak{W}$ widerspricht. Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

Hilfssatz 3. $\mathfrak{Z}/\mathfrak{k}$ *sei wieder separabel. Der Grad von* $\mathfrak{D}/\mathfrak{k}$ *ist dann gleich* n *und der von* $\mathfrak{Z}/\mathfrak{k}$ *gleich* e. *Also gilt* $r = em^2$, $n = \frac{r}{m} = em$, *wo* m *den Grad von* $\mathfrak{D}/\mathfrak{Z}$ *bedeutet.*

Die Behauptungen folgen unmittelbar aus den Gleichungen $re = n^2 = (W:k)^2 = (\mathfrak{W}:\mathfrak{k})^2 = m^2(\mathfrak{Z}:\mathfrak{k})^2$, $r = m^2(\mathfrak{Z}:\mathfrak{k})$.

Beweis des Satzes 1. a) Existenz von S/k. Der Beweis wird leicht auf den Fall eines normalen $\mathfrak{S}/\mathfrak{k}$ zurückgeführt. χ sei die Charakteristik von $\mathfrak{k}$, m der Grad von $\mathfrak{S}/\mathfrak{k}$.

α) Zuerst sei $\chi = 0$ und m beliebig oder $\chi \neq 0$ und $(m, \chi) = 1$. Dann besitzt $\mathfrak{S}$ nach R. Brauer [4]) einen separablen galoisschen Zerfällungskörper $\mathfrak{K}$, so daß die Algebrenklasse von $\mathfrak{S}$ ein aus m-ten Einheitswurzeln bestehendes Faktorensystem $\{\mathfrak{a}_{\sigma,\tau}\}$ in $\mathfrak{K}$ hat. K sei ein unverzweigter Körper über k mit dem Restklassenkörper $\mathfrak{K}$. Nun besitzt jede m-te Einheitswurzel aus $\mathfrak{K}$ eine und *nur eine* m-te Einheitswurzel aus K als Repräsentanten. $a_{\sigma,\tau}$ sei diejenige in der Klasse $\mathfrak{a}_{\sigma,\tau}$. Dann bilden die $a_{\sigma,\tau}$ ein Faktorensystem von K/k. Die zum verschränkten Produkt $(a_{\sigma,\tau}, K)$ ähnliche Divisionsalgebra S ist unverzweigt über k, und ihre Restklassenalgebra ist zu $\mathfrak{S}$ isomorph; das zeigt man analog wie bei Witt a. a. O.

β) Ferner sei $\chi \neq 0$ und m eine Potenz von χ, $m = \chi^t$. Dann ist $\mathfrak{S}$ einer zyklischen Algebra $(\mathfrak{a}, \mathfrak{K}, s)$ ähnlich [5]). K sei ein unverzweigter zyklischer Körper über k mit Restklassenkörper $\mathfrak{K}$, und a ein in k liegender Repräsentant der Klasse $\mathfrak{a}$. Man bilde (a, K, s) und schließe analog wie oben.

γ) Schließlich sei $\chi \neq 0$ und m beliebig. Es sei etwa $m = \chi^t m_0$ mit $(m_0, \chi) = 1$. $\mathfrak{S}$ ist direktes Produkt zweier Divisionsalgebren der Grade χ^t und m_0. Der Beweis läßt sich damit leicht auf die Fälle α) und β) reduzieren.

Zusammengefaßt ist der Existenzbeweis in Satz 1 erbracht.

b) Das Zentrum $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{S}$ sei separabel über $\mathfrak{k}$. Ist S/k eine unverzweigte Divisionsalgebra mit $\mathfrak{S}$ als Restklassenalgebra, so besitzt das Zentrum Z von S nach Hilfssatz 3 den Körper $\mathfrak{Z}$ als Restklassenkörper. Z ist durch $\mathfrak{Z}$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Weiter ist die Divisionsalgebra S/Z durch $\mathfrak{S}/\mathfrak{Z}$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt, wie Witt a. a. O. gezeigt hat. Damit ist der zweite Teil des Satzes 1 bewiesen.

---

[3]) Vgl. etwa E. Noether, Nichtkommutative Algebra, Math. Zeitschr. **37** (1933), 514—541.

[4]) R. Brauer, Untersuchungen über die arithmetischen Eigenschaften von Gruppen linearer Substitutionen I, Math. Zeitschr. **28** (1928), 677—696.

[5]) A. A. Albert, Simple algebras of degree p^e over a centrum of characteristic p, Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), 112—126. Für unseren Beweis genügt auch eine schwächere Behauptung in T. Nakayama, Über die Algebren über einem Körper von der Primzahlcharakteristik II, Proc. Imp. Acad. Japan **12** (1936), 113—114; oder O. Teichmüller, p-Algebren, Deutsche Math. **1** (1936), 362—388.

Beweis des Satzes 2. D besitzt nach Hilfssatz 2 einen galoisschen unverzweigten Zerfällungskörper K mit über $\mathfrak{k}$ separablem Restklassenkörper. Sei $D \sim (a_{\sigma,\tau}, K)$ und $a_{\sigma,\tau} = \pi^{f\sigma,\tau} b_{\sigma,\tau}$, mit Einheiten $b_{\sigma,\tau}$ in K. $(b_{\sigma,\tau}, K)$ ist einer unverzweigten Divisionsalgebra S ähnlich. Weiter ist nach Witt $(\pi^{f\sigma,\tau}, K) \sim (\pi, Z, s)$ mit einem zyklischen unverzweigten Körper $Z \leqq K$. Also $D \sim S \times (\pi, Z, s)$. Die Eindeutigkeit der Darstellung beweist man auch analog wie bei Witt.

Man sieht ferner, daß das Produkt der Maximalordnung von S und der von (π, Z, s) eine Maximalordnung in $S \times (\pi, Z, s)$ ist. Die Restklassenalgebra dieser Maximalordnung (nach dem zweiseitigen Primideal) ist der von (einer Maximalordnung von) $S \times Z$ isomorph. Andererseits ist sie ein Matrizenring über $\mathfrak{D}$, und daraus folgt, daß $\mathfrak{Z}$ zum Restklassenkörper von Z isomorph ist.

Als eine leichte Anwendung beweisen wir nun

Satz 3. *Eine (nicht notwendig normale) Divisionsalgebra D über k besitzt eine bis auf innere Automorphismen eindeutig bestimmte Trägheitsdivisionsalgebra, wenn das Zentrum $\mathfrak{Z}$ der Restklassenalgebra $\mathfrak{D}$ von D über $\mathfrak{k}$ separabel ist.* (Eine Teilalgebra T von K/k heißt eine Trägheitsalgebra, wenn T unverzweigt über k ist und alle Restklassen in D, d. h. alle Elemente von $\mathfrak{D}$, durch die Elemente von T repräsentiert werden können.)

a) Zuerst sei D/k normal. $D \sim S \times (\pi, Z, s)$ sei die oben erklärte Zerlegung. Ist die Teilalgebra $S \times Z$ von $S \times (\pi, Z, s)$ ein r-reihiger Matrizenring über einer Divisionsalgebra T', so ist $S \times (\pi, Z, s)$ r-reihiger Matrizenring über D. Daraus sieht man ohne Mühe, daß D eine zu T' isomorphe Teilalgebra T besitzt. T ist ersichtlich eine Trägheitsalgebra von D/k. Daß die Trägheitsalgebra von D/k bis auf innere Automorphismen eindeutig bestimmt wird, folgt aus Satz 1.

b) Jetzt sei D/k nicht-normal. k_0 sei das Zentrum von D und k_1 der Trägheitskörper von k_0/k. Wir konstruieren dann nach Satz 1 eine unverzweigte Divisionsalgebra T_1 über k_1 mit einer zu $\mathfrak{D}$ isomorphen Restklassenalgebra. $T_0 = T_1 \times k_0$ sei das direkte Produkt von T_1 und k_0 bezüglich k_1. Sind $\mathfrak{o}_0, \mathfrak{O}_1$ die Maximalordnungen von k_0, T_1, so ist $\mathfrak{O}_0 = \mathfrak{O}_1 \mathfrak{o}_0$ eine Maximalordnung der (jedenfalls halbeinfachen) Algebra T_0, denn die Diskriminante von $\mathfrak{O}_1$ bezüglich k_1 ist (1). Bedeutet weiter π_0 ein Primelement in k_0, so ist $\mathfrak{O}_0/\pi_0\mathfrak{O}_0$ zur Restklassenalgebra von T_1, also zu $\mathfrak{D}$, isomorph, da k_0/k_1 voll-verzweigt ist. Demnach ist $\pi_0\mathfrak{O}_0$ ein Primideal, und T_0 ist eine Divisionsalgebra. Andererseits gibt es nach a) eine Trägheitsalgebra $\overline{T}$ von D/k_0. $\overline{T}$ ist nach Satz 1 zu T_0 isomorph, enthält also eine zu T_1 isomorphe Teilalgebra T. T ist ersichtlich eine Trägheitsalgebra von D/k.

Nun sei T eine beliebige Trägheitsalgebra von D/k. k_1 ist in T enthalten, wie man leicht zeigt, und die Teilalgebra Tk_0 von D ist das direkte Produkt $T \times k_0$ bezüglich k_1. T^* sei eine zweite Trägheitsalgebra von D/k. Analog ist $T^* \geqq k_1$ und $T^*k_0 = T^* \times k_0$ bezüglich k_1. Weiter ist T^* zu T isomorph, und dieser Isomorphismus setzt sich in natürlicher Weise zu einem solchen von T^*k_0 und Tk_0 fort. Dieser Fortsetzungsisomorphismus wird dann durch einen inneren Automorphismus von D bewirkt.

Damit ist die Behauptung vollständig bewiesen.

Eingegangen 15. März 1937.

Bestimmung der zyklisch ordnungshomogenen ebenen Bogen.

(Erste Mitteilung.)

Von *Otto Haupt* in Erlangen.

Einleitung.

0, 1. In einer früher erschienenen Note [1]) wurde dargelegt, wie mit jedem Ordnungsbegriff ein „Strukturproblem" verbunden ist. Die Erledigung eines solchen Strukturproblems erfordert: Erstens die Sicherstellung des sogenannten *Verteilungssatzes*, d. h. des Satzes, daß jedes der zu betrachtenden Gebilde darstellbar ist als abgeschlossene Hülle einer Summe von ordnungshomogenen, d. h. aus lauter Punkten gleicher Ordnung bestehenden, Gebilden; zweitens die Aufstellung des sogenannten *Existenzsatzes*, welcher die für ordnungshomogene Gebilde (genauer die für die Punkte auf solchen Gebilden) wirklich auftretenden Ordnungen angibt; und drittens die Gewinnung des sogenannten *Punktexistenzsatzes*, welcher die für *einzeln-liegende* (d. h. für nicht auf ordnungshomogenen Gebilden gelegene) Punkte wirklich auftretenden Ordnungen feststellt. Dazu kommt als Vertiefung des Existenzsatzes die Aufklärung zunächst des lokalen Verhaltens (z. B. der „Differenzierbarkeitseigenschaften") der ordnungshomogenen Gebilde, als Vertiefung des Punktexistenzsatzes die entsprechende Untersuchung für einzelne Punkte.

0, 2. In den folgenden Zeilen soll ein solches Strukturproblem behandelt werden, nämlich der Fall der *zyklischen Ordnung für ebene Bogen* [2]). Operationsgebiet ist also die Ebene (vgl. dazu Nr. **1**, 1), Objekte sind die ebenen Bogen, Ordnungscharakteristiken sind die Kreise. Wir werden dabei zunächst *nur auf den Existenzsatz eingehen*. Der Verteilungssatz für den Fall der zyklischen Ordnung ist nämlich durch eine viel allgemeinere Untersuchung sichergestellt [3]). Hingegen wird der Beweis des — wie es scheint, schon im vorliegenden, zyklischen Falle nicht an der Oberfläche liegenden — Existenzsatzes in der vorliegenden (ersten) Mitteilung im einzelnen durchgeführt mit Ausnahme der Konstruktion gewisser dabei benötigter Systeme von Kreisen (sogenannter normierter Systeme); diese Konstruktion soll in einer Fortsetzung gegeben werden. Der in vorliegender Mitteilung enthaltene Teil des Beweises liefert übrigens auch einen Beweis für den Existenzsatz im Falle (der linearen Ordnung und allgemeiner) einer K_2-Ordnung; dies wird in § 6 gezeigt [4]).

---

[1]) Haupt, Strukturprobleme bei reellen Gebilden, Sitz.-Ber. d. bayer. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Abt. 1935, 183—188.

[2]) Vgl. die Voranzeige des einschlägigen Existenzsatzes a. a. O. [1]), 185.

[3]) Haupt, Zum Verteilungssatz der Strukturtheorie reeller Gebilde. Monatsh. f. Math. u. Phys. **46** (1937), 84—92.

[4]) Insbesondere ist also darin enthalten die nähere Ausführung eines bisher nur skizzierten Beweisteiles für den Fall der wachsenden linearen Ordnung in der Ebene. Vgl. Haupt, Über die Struktur reeller Kurven, Crelles Journal **164** (1931), Nr. **3**, 1.

0, 3. Bei dieser Gelegenheit sei auf die *Beziehungen* derartiger geometrischer Betrachtungen *zur Theorie der reellen Funktionen* hingewiesen. Beispielsweise besagt der Existenzsatz für die *lineare* Ordnung in der Ebene R_2 folgendes: Es seien $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ reelle, eindeutige, stetige Funktionen in $0 \leqq t \leqq 1$ derart, daß die Gleichung:

$$\varphi(t)[\psi(t_2) - \psi(t_1)] - \psi(t)[\varphi(t_2) - \varphi(t_1)] - [\varphi(t_1)\psi(t_2) - \varphi(t_2)\psi(t_1)] = 0$$

für *beliebig* vorgegebene, festgehaltene, voneinander verschiedene t_1, t_2 aus $(0, 1)$ nur endlich viele verschiedene Nullstellen t aus $(0, 1)$ besitzt: dann gibt es auf $(0, 1)$ dicht gelegene Teilintervalle J, so beschaffen, daß unsere Gleichung in J nur die Lösungen $t = t_1$ und $t = t_2$ besitzt, sobald t_1 und t_2 in J liegen. Weitere derartige Zusammenhänge ergeben sich bei der Untersuchung des lokalen Verhaltens ordnungshomogener Bogen [5]).

0, 4. Der nachstehend für den Fall der zyklischen Ordnung gegebene Beweis gilt allgemeiner ohne wesentliche Veränderung für den Fall der K_3-Ordnungen, jedenfalls bei geeigneten zusätzlichen Annahmen über die K_3-Kurven; weiter gestattet er, soweit es sich übersehen läßt, eine Ausdehnung auf den Fall der K_k-Ordnungen mit $k \geqq 4$. Dies hoffe ich später noch näher auszuführen. Im Zusammenhange damit wird vermutlich auch der Existenzsatz für den Fall der Bogen im R_n bei linearer Ordnung zugänglich werden.

§ 1. Definition der zyklischen Ordnung. Verteilungssatz.

1, 1. *Operationsbereich* ist die *zyklisch abgeschlossene*, d. h. die im Sinne der Kreisgeometrie abgeschlossene *Ebene*. Diese wird durch Adjunktion *eines* uneigentlichen Punktes aus der euklidischen Ebene erhalten. Sie kann als metrisierbarer, (in sich) kompakter Raum aufgefaßt werden; dabei wird die Umgebung des uneigentlichen Punktes in bekannter Weise einbezogen etwa durch inverse Abbildung auf die Umgebung des Nullpunktes. *Objekte* der Betrachtung sind die ebenen *Bogen* $\mathfrak{B}$, d. h. die eindeutigen stetigen Streckenbilder [6]), welche (*mindestens zwei*) *verschiedene Bildpunkte enthalten. Ordnungscharakteristiken* schließlich seien die *Kreise, zu welchen hier folgerichtig auch die Geraden gezählt werden.* Unter „Kreis" verstehen wir dabei immer die Kreis*linie* in Gegensatz zu einem von einer Kreislinie begrenzten zweidimensionalen Gebiete, einer Kreis*scheibe*. Ein Bogen $\mathfrak{B}$ heißt von der *beschränkten* zyklischen Ordnung n bzw. von *wachsender* bzw. von *unendlicher zyklischer Ordnung*, wenn die Mächtigkeit des Durchschnittes von $\mathfrak{B}$ mit einem Kreise maximal gleich n bzw. endlich, aber nicht beschränkt bzw. maximal gleich unendlich ist; dabei wird jeder Punkt des Durchschnittes mit der ihm auf $\mathfrak{B}$ zukommenden Vielfachheit gezählt [7]). Handelt es sich um die Mächtigkeit des Durchschnittes von $\mathfrak{B}$ ausschließlich mit Geraden, so sprechen wir von *linearer* Ordnung. Die Fälle beschränkter *und* wachsender zyklischer bzw. linearer *Ordnung* sollen zur Abkürzung als der *Fall endlicher* zyklischer bzw. linearer *Ordnung* zusammengefaßt werden. Der Fall, daß in dem betrachteten Bogen Kreisbogen oder Strecken als Teile enthalten sind, soll bei der Ordnungsdefinition durch folgende Festsetzung berücksichtigt werden: Jeder einzelne, auf einer Ordnungscharakteristik gelegene Teilbogen von $\mathfrak{B}$ (Kreisbogen bzw. Strecke) wird bei Bestimmung der zyklischen bzw. linearen Ordnung des

---

[5]) Vgl. J. Hjelmslev, Die graphische Geometrie, Förhandl. Ättonde skandinav. Matematikerkongr., Stockholm 1934.

[6]) Dabei soll niemals eine Strecke Urbildmenge eines einzigen Punktes im Bilde sein.

[7]) Es handelt sich also um die „starke" lineare bzw. zyklische Ordnung im Gegensatz zur „schwachen" Ordnung, bei welcher jeder (Bild-)Punkt nur einfach gezählt wird. Vgl. A. Rosenthal, Die Translationsordnung ebener Kurven, Monatsh. f. Math. u. Phys. **45** (1936), 81.

Bogens als ein (*verlängerter*) Punkt gezählt. Demzufolge besitzt jeder Kreisbogen und jede Strecke die zyklische Ordnung zwei, ferner jede Strecke die lineare Ordnung eins [8]).

Zufolge unserer Definition ist die *zyklische* Ordnung eines Bogens *nicht kleiner als* seine *lineare* Ordnung.

1, 2. Als *zyklisch* bzw. *linear ordnungshomogen* wird jeder Bogen bezeichnet, dessen sämtliche Punkte die *gleiche* zyklische bzw. lineare Ordnung besitzen. Hat ein ordnungshomogener Bogen selbst die gleiche Ordnung wie (alle) seine Punkte, so heißt er *total ordnungshomogen*. Wir haben dann den [3])

Verschärften Verteilungssatz. Ein beliebig vorgegebener (ebener) Bogen $\mathfrak{B}$ ist darstellbar als in $\mathfrak{B}$ abgeschlossene Hülle einer Summe von (höchstens) abzählbar vielen total zyklisch ordnungshomogenen Teilbogen, welche paarweise höchstens Endpunkte gemeinsam haben.

§ 2. Existenzsatz: Vorbereitende Bemerkungen.

2, 1. Es erhebt sich nun die Frage, welche zyklischen Ordnungen bei (total) ordnungshomogenen Bogen überhaupt möglich sind. Die Antwort wird gegeben durch den Existenzsatz, um dessen Beweis es sich, wie in der Einleitung erwähnt, im folgenden handelt. Er lautet:

Existenzsatz bei zyklischer Ordnung. *Abgesehen von Kreisbogen und Strecken gibt es total zyklisch ordnungshomogene Bogen nur von der (kleinstmöglichen) zyklischen Ordnung drei und von der (größtmöglichen) zyklischen Ordnung unendlich. Die Kreisbogen, speziell auch die Strecken, haben bei unserer Ordnungsdefinition als total ordnungshomogen von der zyklischen Ordnung zwei zu gelten.*

Die hierin enthaltene Behauptung bezüglich *der Existenz von total zyklisch ordnungshomogenen (Konvex-)Bogen der Ordnungen drei und unendlich* kann ohne weiteres bewiesen werden: Beispiele *total ordnungshomogener Bogen der zyklischen Ordnung drei* liefern die *Teilbogen eines Ellipsenquadranten*. Der Beweis hierfür ergibt sich z. B. aus dem Fehlen von Scheitelpunkten auf einem solchen Bogen [9]). — *Total zyklisch ordnungshomogen von der Ordnung unendlich* ist beispielsweise jeder *Konvexbogen mit überall dicht liegenden Ecken*. In der Tat: In jeder beliebig kleinen beiderseitigen Umgebung einer Ecke E lassen sich vier Punkte des Bogens finden, die auf einem Kreise liegen (man braucht nur von einem Kreise auszugehen, welcher die beiden Halbtangenten von E beliebig nahe bei E berührt); *jeder* Punkt des Bogens ist also mindestens von der zyklischen Ordnung vier. Daher liegen auf unserem Bogen die ordnungshomogenen Teilbogen von mindestens vierter, also (zufolge des einen Teiles des Existenzsatzes) von unendlicher Ordnung überall dicht; der ganze Bogen ist total zyklisch ordnungshomogen von der Ordnung unendlich, wie behauptet. Weitere, sogar stetig differenzierbare, aber nirgends konvexe Beispiele ordnungshomogener Bogen der zyklischen Ordnung unendlich ergeben sich aus der Tatsache, daß zufolge der hier benützten Definition jeder ordnungshomogene Bogen von unendlicher linearer Ordnung zugleich ordnungshomogen von unendlicher zyklischer Ordnung ist [10]). Stetig differenzierbare und konvexe Bogen, die ordnungs-

---

[8]) A. a. O. [1]) ist eine andere Festsetzung getroffen.

[9]) Man bestätigt etwa durch Rechnung, daß ein solcher Ellipsenbogen keinen Punkt der zyklischen Ordnung k mit $k \geqq 4$ enthält. Da ferner für diesen Bogen bezüglich der Kreise der spezielle Monotoniesatz gilt (vgl. z. B. im Text Nr. 2, 7), so ergibt sich die Behauptung aus den allgemeinen Sätzen über K_3-Ordnung; vgl. Haupt, Zur Theorie der Ordnung reeller Kurven in der Ebene bezüglich vorgegebener Kurvenscharen, Monatsh. f. Math. u. Phys. **40** (1933), § 5.

[10]) Beispiele stetig differenzierbarer Bogen, die ordnungshomogen von unendlicher linearer Ordnung sind,

homogen von der zyklischen Ordnung unendlich sind, könnten wohl mit Hilfe des Satzes [11]) konstruiert werden, daß ein Bogen von der zyklischen Ordnung drei überall einen eindeutig bestimmten rechtsseitigen und linksseitigen Tangentialschmiegkreis besitzt.

2, 2. Dem eben Bemerkten zufolge reduziert sich der Existenzsatz auf den

Satz 2, 2. *Jeder total zyklisch ordnungshomogene Bogen $\mathfrak{B}$ von endlicher zyklischer Ordnung ist notwendig von der zyklischen Ordnung drei, es sei denn, daß $\mathfrak{B}$ ein Kreisbogen oder eine Strecke ist.*

Wir werden uns also lediglich mit dem Beweise dieses letzteren Satzes zu beschäftigen haben. Um ihn in eine noch bequemere Form zu bringen, bemerken wir: Ein zyklisch ordnungshomogener Bogen $\mathfrak{C}$, in welchem Kreisbogen enthalten sind, ist selbst ein Kreisbogen. In der Tat: Es sei $\mathfrak{C}$ zyklisch ordnungshomogen; ferner sei der Kreisbogen $\mathfrak{K}$ ein (abgeschlossener) Teilbogen von $\mathfrak{C}$, wobei wir $\mathfrak{K}$ gleich so wählen, daß er in keinem größeren Kreisteilbogen von $\mathfrak{C}$ als echter Teilbogen enthalten ist. Da $\mathfrak{K}$ homogen von der zyklischen Ordnung zwei ist, muß überhaupt *jeder* Punkt von $\mathfrak{C}$ diese Ordnung zwei besitzen. Wäre $\mathfrak{K}$ nicht mit $\mathfrak{C}$ identisch, so wäre (mindestens) einer der Endpunkte von $\mathfrak{K}$ innerer Punkt auf $\mathfrak{C}$; es sei dies der Punkt C. Und in beliebiger Nähe von C auf $\mathfrak{C}$ gäbe es dann einerseits Punkte P von $\mathfrak{C}$, welche *nicht* auf $\mathfrak{K}$ und auch nicht auf dem Trägerkreis $\mathfrak{K}_0$ von $\mathfrak{K}$ liegen, und andererseits Punkte Q_1, Q_2 von $\mathfrak{K}$. Durch Q_1, Q_2 und P wäre aber ein von $\mathfrak{K}_0$ verschiedener Kreis bestimmt, welcher mit der Umgebung von C auf $\mathfrak{C}$ mindestens drei *verschiedene* Punkte gemeinsam hat (unter welchen sich auch verlängerte Punkte befinden können). Der Punkt C wäre also auf $\mathfrak{C}$ von mindestens dritter zyklischer Ordnung, also $\mathfrak{C}$ nicht ordnungshomogen. — Genau ebenso zeigt man: Ein zyklisch ordnungshomogener Bogen, welcher Strecken als Teilbogen enthält, muß eine Strecke sein. Und durch ganz ähnliche Überlegungen erkennt man allgemeiner, daß jeder von einem Kreisbogen (insbesondere von einer Strecke) verschiedene Bogen von mindestens dritter zyklischer Ordnung ist. Also:

Satz 2, 21. *Ein ebener Bogen ist dann und nur dann von der zyklischen Ordnung zwei, wenn er ein Kreisbogen oder eine Strecke ist. Jeder zyklisch ordnungshomogene Bogen, welcher Strecken oder Kreisbogen enthält, ist (total zyklisch ordnungshomogen) von der zyklischen Ordnung zwei.*

Wir betrachten daher *nur noch Bogen endlicher zyklischer Ordnung, die keine Strecken und Kreisbogen enthalten.* Unter solchen Bogen brauchen wir jetzt lediglich die *konvexen* in Betracht zu ziehen; wobei hier unter einem Konvexbogen ein Bogen von der linearen Ordnung zwei zu verstehen ist. In der Tat: Ist $\mathfrak{B}$ von endlicher zyklischer Ordnung, so ist $\mathfrak{B}$ erst recht von endlicher linearer Ordnung, da die Geraden zu den Kreisen gerechnet werden sollen (Nr. **1**, 1). Zufolge des Verteilungs- und des Existenzsatzes für die lineare Ordnung ist daher jeder unserer Bogen $\mathfrak{B}$ abgeschlossene Hülle einer Summe von, keine Strecken und keine Kreisbogen enthaltenden, Konvexbogen [12]); insbesondere muß also jeder ordnungshomogene Bogen von endlicher zyklischer Ordnung konvexe Teilbogen enthalten. Ist daher gezeigt, daß die zyklische Ordnung eines solchen, total zyklisch ordnungshomogenen, überdies beschränkten, *Konvex*bogens nicht größer als

---

bei J. Hjelmslev, Contribution à la géométrie infinitésimale de la courbe réelle, Oversigt over det kgl. Danske Vidensk. selskabs Forhandl. 1911, 482.

[11]) Vgl. J. Hjelmslev, Introduction à la théorie des suites monotones, Overs. over det kgl. Danske vidensk. selskabs Forhandl. 1914, Nr. 1. (Man braucht den betrachteten Bogen nur als stereographische Projektion eines sphärischen Bogens aufzufassen.)

[12]) Vgl. a. a. O. [4]), Nr. **3**, 1.

drei sein kann, sobald sie endlich ist, so gilt das auch für *jeden* total ordnungshomogenen Bogen von endlicher zyklischer Ordnung. Wir fassen zusammen:

Satz 2, 22. *Der Existenzsatz für zyklische Ordnung ist richtig, wenn folgendes gilt: Jeder total ordnungshomogene ebene beschränkte Konvexbogen von endlicher zyklischer Ordnung, welcher keine Strecken und keine Kreisbogen enthält, besitzt genau die zyklische Ordnung drei.*

Der Vorbereitung für den Beweis dieses Satzes dienen die in den folgenden Nummern des gegenwärtigen Paragraphen gemachten Feststellungen.

2, 3. Wir heben nochmals hervor: Unter einem *Konvexbogen* wird gemäß Nr. 2, 2 im folgenden ausnahmslos ein beschränkter Bogen der linearen Ordnung zwei verstanden, der *keine Strecken oder Kreisbogen als Teilbogen* enthält.

Es sei also $\mathfrak{B}$ konvex. Ferner sei $\mathfrak{K}$ ein Kreis, welcher mit $\mathfrak{B}$ endlich viele, aber mindestens drei verschiedene, Punkte gemeinsam hat ($\mathfrak{K}$ kann also hier keine Gerade sein).

Unter diesen Voraussetzungen gilt:

Satz 2, 3. *Ist irgend eine Orientierung des Konvexbogens $\mathfrak{B}$ festgelegt, so läßt sich für den Kreis $\mathfrak{K}$ eine Orientierung derart wählen, daß die gemeinsamen Punkte von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{K}$ simultannatürlich auf $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{K}$ angeordnet sind* [13]).

Beweis. Es sei A der Anfangs- und E der Endpunkt von $\mathfrak{B}$, also $\mathfrak{B}$ orientiert im Sinne der Fortschreitungsrichtung von A nach E. Ferner sei P_1 der auf $\mathfrak{B}$ am nächsten bei A gelegene Punkt von $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{K}$, d. h. des Durchschnittes von $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{K}$, und es seien $P_1, P_2, \ldots, P_n$ überhaupt sämtliche Punkte von $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{K}$ in natürlicher Anordnung auf $\mathfrak{B}$ ($n \geqq 3$). Durch Addition der abgeschlossenen Strecke EA vervollständigen wir $\mathfrak{B}$ zu einer geschlossenen konvexen Kurve $\overline{\mathfrak{B}}$, deren Orientierung durch die von $\mathfrak{B}$ eindeutig festgelegt ist. Nun hat das von $\overline{\mathfrak{B}}$ begrenzte beschränkte Gebiet mit dem von $\mathfrak{K}$ begrenzten beschränkten Gebiet Punkte gemeinsam; ein solcher sei Q. Und da $\overline{\mathfrak{B}}$ und $\mathfrak{K}$ konvexe, *geschlossene* Kurven sind, so sind die Schnittpunkte der von Q ausgehenden *Halb*geraden mit $\overline{\mathfrak{B}}$ und $\mathfrak{K}$ ein-eindeutig und stetig aufeinander bezogen; der Orientierung von $\overline{\mathfrak{B}}$ bzw. von $\mathfrak{B}$ entspricht daher ein-eindeutig eine Orientierung von $\mathfrak{K}$, bei welcher überdies $P_1, \ldots, P_n$ auch auf $\mathfrak{K}$ in natürlicher Anordnung erscheinen.

1. Zusatz. Der Beweis benützt ersichtlich nur die Geschlossenheit von $\mathfrak{K}$, sowie die Existenz eines Punktes Q, bezüglich dessen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{K}$ gleichzeitig „relativ einfach" sind.

Der Satz 2, 3 gilt daher allgemeiner, wenn an Stelle des Kreises $\mathfrak{K}$ irgendeine (beschränkte) geschlossene Kurve tritt, welche bezüglich eines Punktes Q zugleich mit $\mathfrak{B}$ relativ einfach erscheint; dabei kann $\mathfrak{B}$ irgendein (nicht notwendig konvexer) bezüglich Q relativ einfacher Bogen sein.

2. Zusatz. Man beachte aber: Für den Beweis ist wesentlich, daß $\mathfrak{K}$ eine *geschlossene* Kurve ist. In der Tat gilt unsere Behauptung für den Fall eines Kreis*bogens* $\mathfrak{K}$ nicht ausnahmslos.

2, 4. Entsprechend der in Nr. 2, 3 gemachten Feststellung werden wir im folgenden den jeweils zu untersuchenden Konvexbogen $\mathfrak{B}$ stets *orientiert* annehmen. Im Sinne dieser Orientierung wird $\mathfrak{B}$ „von links nach rechts" oder „von unten nach oben" durchlaufen. Auf eben diese Orientierung beziehen sich die Bezeichnungen: Der Punkt B liegt auf $\mathfrak{B}$ *oberhalb* oder *rechts* (*unterhalb* oder *links*) vom Punkte C; *obere* und *untere*

[13]) Vgl. dazu auch a. a. O. [9]), Nr. 3, 2.

Umgebung (eines Punktes B von $\mathfrak{B}$) *auf* $\mathfrak{B}$; ferner *obere* oder *rechte* bzw. *untere* oder *linke Halbtangente in B an* $\mathfrak{B}$; schließlich *positive* und *negative Seite von* $\mathfrak{B}$. Die letztgenannte Bezeichnung ist dabei erklärt wie folgt: Zu jedem auf $\mathfrak{B}$ *inneren* Punkte C von $\mathfrak{B}$ gibt es eine zweidimensionale Umgebung $V(C)$, welche durch $\mathfrak{B}$ in zwei einfach zusammenhängende, fremde Gebiete $V^+(C)$ und $V^-(C)$ zerlegt wird; dabei bezeichne $V^+(C)$ dasjenige dieser beiden Gebiete, welches bei Durchlaufung von $\mathfrak{B}$ (im Sinne der festgesetzten Orientierung), kurz gesagt, „zur Linken" bleibt. Läßt man C den *offenen* Bogen $\mathfrak{B}$ durchlaufen, so schließen sich die $V^+(C)$ bzw. die $V^-(C)$ bei geeigneter Wahl zu je einem zweidimensionalen einfach zusammenhängenden Gebiete $V^+(\mathfrak{B})$, $V^-(\mathfrak{B})$ so zusammen, daß diese letzteren beiden Gebiete fremd sind; sie besitzen den Bogen $\mathfrak{B}$ als gemeinsamen Teil ihrer Begrenzungen. Unter *positiver* bzw. *negativer Seite* $s^+ = s^+(\mathfrak{B})$ bzw. $s^- = s^-(\mathfrak{B})$ *von* $\mathfrak{B}$ verstehen wir im folgenden immer ein genügend groß gewähltes (zweidimensionales) Gebiet, welches $V^+(\mathfrak{B})$ bzw. $V^-(\mathfrak{B})$ als Teil enthält und fremd ist zu $V^-(\mathfrak{B})$ bzw. zu $V^+(\mathfrak{B})$; auch s^+ und s^- sollen fremd sein.

Die in Verbindung mit $\mathfrak{B}$ betrachteten *Kreise* $\mathfrak{K}$ werden ferner *immer im gleichen Sinne wie* $\mathfrak{B}$, d. h. derart *orientiert*, daß die Punkte von $\mathfrak{B} \frown \mathfrak{K}$ simultan natürlich geordnet sind auf $\mathfrak{B}$ *und* $\mathfrak{K}$. Die so definierte (simultan gleiche) Orientierung von $\mathfrak{K}$ ist erst dann eindeutig bestimmt, wenn $\mathfrak{B} \frown \mathfrak{K}$ mindestens drei verschiedene Punkte enthält.

2, 5. Ein Konvexbogen $\mathfrak{B}$ besitzt in jedem inneren Punkte P eine eindeutig bestimmte *obere* oder rechtsseitige Halbtangente $h^+(P)$ und ebenso eine *untere* oder linksseitige Halbtangente $h^-(P)$. Die obere (untere) Halbtangente $h^+(P)$ ist dabei definiert als Halbtangente in P an die obere (untere) Umgebung von P auf $\mathfrak{B}$ [14]). In den Endpunkten von $\mathfrak{B}$ existiert natürlich nur eine der Halbtangenten.

2, 6. Der oben eingeführte Begriff der „Seite" eines Bogens $\mathfrak{B}$ gestattet uns, gewisse Sachverhalte kurz zu bezeichnen, die beim folgenden Beweise des Existenzsatzes eine große Rolle spielen werden [15]).

Es sei $\mathfrak{J}$ ein Teilbogen von $\mathfrak{B}$. Wir bezeichnen zunächst *zwei Kreise* $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ als (*nach unten*) *gleichartig* (*gelegen*) *bezüglich* $\mathfrak{J}$, oder es soll von *gleichartiger Lage der* $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ *bezüglich* $\mathfrak{J}$ (*nach unten*) die Rede sein, wenn folgendes stattfindet: $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ gehen nicht durch den unteren Begrenzungspunkt von $\mathfrak{J}$, haben aber mit $\mathfrak{J}$ *mindestens drei* (und höchstens *endlich* viele) *Punkte* gemeinsam, so daß $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ insbesondere im gleichen Sinne orientiert werden können wie $\mathfrak{J}$ (vgl. Nr. 2, 4). Ferner soll $\mathfrak{J} \frown \mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{J} \frown \mathfrak{K}_2$ je mindestens einen *Schnitt*punkt enthalten; der auf $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{K}_1$ bzw. $\mathfrak{K}_2$ unterste Schnittpunkt sei S_1 bzw. S_2. Schließlich soll eine untere Umgebung von S_1 auf $\mathfrak{K}_1$ auf der gleichen Seite s von $\mathfrak{J}$ verlaufen wie eine untere Umgebung von S_2 auf $\mathfrak{K}_2$ (abgesehen von S_1, S_2, welche *auf* $\mathfrak{J}$ liegen); der Ausdruck „untere Umgebung auf $\mathfrak{K}_j$" bezieht sich dabei auf die früher (Nr. 2, 4) ein für allemal festgesetzte Orientierung von $\mathfrak{K}_j$. Die *Seite* s heiße den beiden gleichartig gelegenen Kreisen $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ *zugeordnet*.

Ähnlich verabreden wir: Ist T_1 bzw. T_2 Stützpunkt des Kreises $\mathfrak{K}_1$ bzw. $\mathfrak{K}_2$ auf $\mathfrak{J}$, so sollen beide *Stützpunkte gleichartig gelegen* heißen *bezüglich* $\mathfrak{J}$, wenn eine (beiderseitige) Umgebung von T_1 auf $\mathfrak{K}_1$ auf der gleichen Seite s von $\mathfrak{J}$ verläuft wie eine Umgebung von T_2 auf $\mathfrak{K}_2$ (abgesehen von T_1, T_2, welche *auf* $\mathfrak{J}$ liegen). Wir werden dann auch sagen, daß $\mathfrak{K}_1$ *und* $\mathfrak{K}_2$ *gleichartig zu* $\mathfrak{J}$ *liegen bezüglich* T_1 *bzw.* T_2 *mit der zugeordneten Seite* s. — Von den *einzelnen Stützpunkten* T_1 bzw. T_2 sagen wir, daß sie *auf der Seite* s *von* $\mathfrak{J}$ *liegen*.

---

[14]) Bis auf (höchstens) abzählbar viele Ausnahmepunkte besitzen obere und untere Halbtangente stets die gleiche Trägergerade; die Halbtangenten sind einseitig stetig.

[15]) Alle im folgenden betrachteten Bogen sollen von endlicher zyklischer Ordnung sein.

Es sei B ein oberhalb des auf $\mathfrak{J} \frown \mathfrak{K}$ untersten *Schnitt*punktes S gelegener Punkt von $\mathfrak{J} \frown \mathfrak{K}$. Verläuft dann $\mathfrak{K}$ in der Nähe unterhalb B auf der *gleichen* Seite s von $\mathfrak{J}$ wie in der Nähe unterhalb S, so sagen wir: Der Kreis $\mathfrak{K}$ befinde sich *in gleichartiger Lage* (er liege gleichartig) *bezüglich* $\mathfrak{J}$ *und* B; dabei soll der Ausdruck „$\mathfrak{K}$ in der Nähe unterhalb B" bedeuten: „eine untere Umgebung von B auf $\mathfrak{K}$". Liegen $\mathfrak{K}_1$ *und* $\mathfrak{K}_2$ nach unten gleichartig bezüglich $\mathfrak{J}$, d. h. verläuft $\mathfrak{K}_j$ in der Nähe unterhalb S_j auf der Seite s_j $(j = 1, 2)$ und ist $s_1 = s_2 = s(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$, liegt ferner $\mathfrak{K}_j$ gleichartig bezüglich $\mathfrak{J}$ und $B_j (j = 1, 2)$, so sagen wir: Die beiden Kreise $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ befinden sich in *gleichartiger Lage* (sie liegen gleichartig) bezüglich $\mathfrak{J}$ und B_j $(j = 1, 2)$. Die (gemeinsame) Seite $s(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$ werde wieder als $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ *zugeordnet* bezeichnet.

Bei unseren späteren Betrachtungen ist folgende Bemerkung nützlich: *Bei gleichartiger Lage von $\mathfrak{K}$ bezüglich $\mathfrak{J}$ und B ist die Anzahl der unterhalb B auf $\mathfrak{J}$ gelegenen Schnittpunkte von $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{J}$ gerade.*

Anmerkung. Gleichartige Lage von $\mathfrak{K}$ bezüglich $\mathfrak{J}$ und B wird vor allem auftreten für den Fall, daß die obere (oder untere) Halbtangente an $\mathfrak{J}$ in B auf der Kreistangente in B liegt, oder daß B Stützpunkt von $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{J}$ ist.

2, 7. Aus Nr. **2**, 3 folgt, daß für die Kreise als K_3-Kurven der spezielle Monotoniesatz bezüglich $\mathfrak{B}$ gilt, sobald $\mathfrak{B}$ als konvex und von endlicher zyklischer Ordnung vorausgesetzt wird [16]). Dieser spezielle Monotoniesatz besagt, roh gesprochen, folgendes: Sind die Punkte $S_1, \ldots, S_n$ von $\mathfrak{B} \frown \mathfrak{K}$ sämtlich Schnittpunkte und werden irgend zwei unter ihnen festgehalten, so bewegen sich beim Übergang von $\mathfrak{K}$ zu benachbarten Kreisen die übrigen Punkte abwechselnd entgegengesetzt, d. h. immer zwei durch keine beweglichen Punkte getrennten Punkte bewegen sich auf $\mathfrak{B}$ in entgegengesetzter Richtung [17]).

2, 8. Aus der in Nr. **2**, 7 festgestellten Gültigkeit des speziellen Monotoniesatzes können wir bereits entnehmen, daß es total ordnungshomogene Bogen der zyklischen Ordnung vier nicht gibt. In der Tat sind alle Voraussetzungen des allgemeinen diesbezüglichen Satzes für K_3-Kurven erfüllt [18]). Wir haben also folgenden

Satz. *Der Existenzsatz für zyklisch ordnungshomogene Bogen ist bewiesen zugleich mit folgender Aussage: Es gibt keine total ordnungshomogenen beschränkten Konvexbogen von mindestens fünfter und höchstens endlicher zyklischer Ordnung. Dabei sollen die betrachteten Konvexbogen keine Strecken oder Kreisbogen enthalten.*

§ 3. Beweis des Existenzsatzes.

3, 1. Wir gehen nun an den Beweis des Existenzsatzes gemäß der Formulierung in Nr. **2**, 8. Dieser Beweis soll indirekt geführt werden. Wir suchen also einen Widerspruch herzuleiten aus folgender *Annahme*: *Es existiert ein, keine Strecken oder Kreisbogen enthaltender Konvexbogen $\mathfrak{B}$, welcher total ordnungshomogen von mindestens fünfter und höchstens endlicher Ordnung ist.*

Der gewünschte Widerspruch ergibt sich so:

Auf Grund unserer Annahme können wir — wesentlich mit Hilfe des Monotoniesatzes — Systeme von Kreisen konstruieren [19]), welche der Kürze halber als *normierte (Kreis-)Systeme bezüglich $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$* bezeichnet werden sollen und welche folgendermaßen beschaffen sind:

---

[16]) Vgl. a. a. O. [9]), Nr. **3**, 2.

[17]) Genaueres a. a. O. [9]), Nr. **3**, 2, sowie gelegentlich der Durchführung der in [19]) erwähnten Konstruktion.

[18]) Vgl. a. a. O. [9]), Nr. **6**, 6 und **4**, 4.

[19]) Die Durchführung dieser Konstruktion wird in einer folgenden Mitteilung gegeben werden.

Es sei $\mathfrak{T}$ ein *beliebig* vorgegebener, *offener* Teilbogen von $\mathfrak{B}$, ferner $\mathfrak{T}'$ ein *beliebig* vorgegebener *offener* Teilbogen von $\mathfrak{T}$; dabei ist auch der Fall $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}'$ zugelassen. Dann gibt es einen *abgeschlossenen* Teilbogen $\mathfrak{T}^*$ von $\mathfrak{T}'$ und dazu einen offenen Teilbogen $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{T}'$ „zwischen" $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}^*$ (so daß also die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{Z}$ in $\mathfrak{T}'$ enthalten ist und $\mathfrak{T}^*$ in $\mathfrak{Z}$) mit folgenden Eigenschaften: Bei festgehaltenen $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$, $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{T}^*$ existiert *zu jedem Punkte P von* $\mathfrak{T}^*$ ein Kreis $\mathfrak{K}(P; \mathfrak{T}^*)$ von folgender Beschaffenheit:

I. *Der Kreis* $\mathfrak{K}(P; \mathfrak{T}^*)$ *geht durch P und besitzt in P die obere Halbtangente an* $\mathfrak{B}$ in P bzw. die Trägergerade dieser Halbtangente als *Tangente.*

II. Es hat $\mathfrak{K}(P; \mathfrak{T}^*)$ *mit* $\mathfrak{T}$ *unterhalb P* mindestens zwei *Schnittpunkte* gemeinsam; neben diesen Schnittpunkten können (unterhalb P) auch noch (auf $\mathfrak{T}$ gelegene) Stützpunkte auftreten.

III. Mindestens einer der unterhalb P gelegenen *Schnitt*punkte von $\mathfrak{K}(P; \mathfrak{T}^*)$ mit $\mathfrak{T}$ liegt in $\mathfrak{T}'$.

IV. *Alle* $\mathfrak{K}(P; \mathfrak{T}^*)$ *liegen — unabhängig von P — gleichartig bezüglich* $\mathfrak{T}$ *und P,* etwa auf der Seite $s(\mathfrak{T}^*)$. Diese, allen Kreisen gleichzeitig zugeordnete, *Seite* $s(\mathfrak{T}^*)$ heiße kurz *dem Bogen* $\mathfrak{T}^*$ *zugeordnet.*

V. Alle unterhalb P gelegenen *Schnitt*punkte von $\mathfrak{K}(P; \mathfrak{T}^*)$ mit $\mathfrak{T}$ liegen außerhalb des Teilbogens $\mathfrak{Z}$, also erst recht außerhalb $\mathfrak{T}^*$, und zwar gilt das gleichzeitig für *alle* Punkte P von $\mathfrak{T}^*$.

VI. Es seien $S_1, \ldots, S_{2k}$, wo $1 \leqq k$, die sämtlichen, unterhalb P gelegenen *Schnitt*punkte von $\mathfrak{T}$ mit $\mathfrak{K}(P; \mathfrak{T}^*)$; und zwar seien die S_ν geordnet in ihrer Reihenfolge auf $\mathfrak{T}$ von unten nach oben. Dann gibt es einen, von P *unabhängigen*, festen (abgeschlossenen) Teilbogen $\mathfrak{Q}$ von $(\mathfrak{T} - \mathfrak{Z})$ unterhalb $\mathfrak{Z}$, welcher zwischen den beiden obersten Schnittpunkten S_{2k-1} und S_{2k} *aller* $\mathfrak{K}(P; \mathfrak{T}^*)$ liegt (es soll also $\mathfrak{Q}$ insbesondere Teilbogen des von S_{2k-1} und S_{2k} begrenzten (offenen) Teilbogens von $\mathfrak{T}$ sein). — Im Zusammenhange mit gegenwärtiger Forderung VI wird mit Q ein beliebiger Punkt im *Innern* von $\mathfrak{Q}$ bezeichnet, welcher also zwischen S_{2k-1} und S_{2k} liegt gleichzeitig für *alle* P aus $\mathfrak{T}^*$ bzw. für *alle* $\mathfrak{K}(P; \mathfrak{T}^*)$.

3, 2. Es ist jetzt zu zeigen, daß die Existenz der in Nr. **3**, 1 gekennzeichneten normierten Systeme von Kreisen $\mathfrak{K}(P; \mathfrak{T}^*)$ [mit den Eigenschaften I—VI] zu einem Widerspruch führt.

3, 21. Es sei also $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1$ ein erster, beliebig gewählter offener Teilbogen von $\mathfrak{B}$, ferner sei $\mathfrak{T}' = \mathfrak{T}_1'$ irgendein in $\mathfrak{T}_1$ enthaltener offener Teilbogen und weiter seien $\mathfrak{T}^* = \mathfrak{T}_1^*$, $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_1$ Teilbogen von $\mathfrak{T}_1'$ bzw. von $(\mathfrak{T}_1 - \mathfrak{Z}_1)$, welche im Sinne von Nr. **3**, 1; I—VI, zu dem gegebenen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_1'$ bestimmt sind. Die dem $\mathfrak{T}_1^*$ gemäß Nr. **3**, 1; IV, zugeordnete Seite von $\mathfrak{B}$ sei $s_1^* = s(\mathfrak{T}_1^*)$; ferner sei $Q = Q_1$ ein Punkt auf $(\mathfrak{T}_1 - \mathfrak{Z}_1)$ gemäß Nr. **3**, 1; VI. Schließlich sei R_1 der auf $\mathfrak{B}$ oberste Punkt von $\mathfrak{T}_1^*$.

3, 22. Nunmehr bilden wir zu $\mathfrak{T}_1^*$ einen abgeschlossenen Teilbogen $\mathfrak{T}_2^*$ durch folgendes Verfahren: Wir bezeichnen den von Q_1 und R_1 begrenzten offenen Teilbogen $\overset{\frown}{Q_1 R_1}$ von $\mathfrak{T}_1$ mit $\mathfrak{T}_2$. Ferner setzen wir $\mathfrak{T}_2'$ gleich dem offenen Kern von $\mathfrak{T}_1^*$, welcher ja ganz in $\mathfrak{T}_2$ enthalten ist. Zu $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_2'$ seien im Sinne von Nr. **3**, 1; I—VI, bestimmt: $\mathfrak{T}_2^*$, $\mathfrak{Z}_2$, $s_2^* = s^*(\mathfrak{T}_2^*)$, Q_2; dabei ist also *insbesondere* $\mathfrak{T}_2^*$ *im offenen Kern von* $\mathfrak{T}_1^*$ *enthalten.* Dann sind zwei Fälle möglich:

Fall A: $s_1^* = s_2^*$.

Fall B: $s_1^* \neq s_2^*$.

3, 23. Wir weisen nun zunächst (§ 4) nach, daß Fall A zu einem Widerspruch führt, daß also a priori nur Fall B möglich ist. Um auch die Annahme des Falles B ad absurdum zu führen, bilden wir durch sinngemäße Fortsetzung des in Nr. **3**, 22 angegebenen Verfahrens zu $\mathfrak{T}_2^*$ einen (in dessen offenem Kern enthaltenen) abgeschlossenen Teilbogen $\mathfrak{T}_3^*$, ferner entsprechend zu $\mathfrak{T}_3^*$ einen $\mathfrak{T}_4^*$ usw. Dann müssen in der Reihe der entsprechend zugehörigen Seiten $s_3^* = s^*(\mathfrak{T}_3^*)$, $s_4^* = s^*(\mathfrak{T}_4^*)$ usw. je zwei benachbarte verschieden sein: $s_1^* \neq s_2^*$, $s_2^* \neq s_3^*, \ldots, s_\nu^* \neq s_{\nu+1}^*, \ldots$. Das führt aber, wie in § 5 gezeigt wird, zu einem Widerspruch mit der ursprünglichen Voraussetzung, daß $\mathfrak{B}$ von endlicher zyklischer Ordnung sei.

Zwecks übersichtlicherer Darstellung der Beweise in den §§ 4, 5 und 6 schicken wir in Nr. **3**, 3 und **3**, 4 ein paar einfache Bemerkungen voraus. Dabei benützen wir wesentlich die Tatsache, daß *zwei sich berührende Kreise identisch sind, falls sie einen vom Berührungspunkt verschiedenen Punkt gemeinsam haben* (und umgekehrt).

3, 3. Zunächst besprechen wir folgendes:

Voraussetzung. Es seien $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}''$ zwei verschiedene Kreise, die sich im Punkte P_0 berühren. Es gibt dann in der (zyklisch abgeschlossenen) Ebene ein sichelförmiges eindeutig bestimmtes Gebiet $\Sigma = \Sigma(\mathfrak{K}', \mathfrak{K}'')$, dessen Begrenzung gleich der Summe der beiden Kreise ist. O. B. d. A. können wir Σ als beschränkt voraussetzen, da wir andernfalls nur eine Inversion — z. B. an $\mathfrak{K}'$ — vorzunehmen brauchen, um das Gewünschte zu erreichen. Σ ist dann der Durchschnitt z. B. des „Innern" der von $\mathfrak{K}'$ bestimmten (beschränkten) Kreisscheibe k' mit dem „Äußern" der, $\mathfrak{K}''$ entsprechenden, beschränkten Kreisscheibe k''; es ist also Σ offener Kern von $((k' + k'') - k' \frown k'')$.

Es sei ferner $\mathfrak{C}$ ein einfacher Bogen mit den von P_0 verschiedenen Endpunkten A', A''; dabei soll A' auf $\mathfrak{K}'$ liegen und A'' auf $\mathfrak{K}''$, während $\mathfrak{C}$ im übrigen ganz in der abgeschlossenen Hülle von Σ verläuft und fremd ist zu P_0.

Behauptung. Ist $\mathfrak{K}'''$ irgendein von $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}''$ verschiedener Kreis, welcher durch P_0 geht und dort mit $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{K}''$ die Tangente gemeinsam hat, so ist $\mathfrak{C} \frown \mathfrak{K}'''$ nicht leer, falls $\Sigma \frown \mathfrak{K}'''$ nicht leer ist.

Der Beweis folgt unmittelbar, etwa indem man durch Inversion den Punkt P_0 in den uneigentlichen Punkt der zyklisch-abgeschlossenen Ebene schafft und dadurch $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{K}''$ usw. in Geraden verwandelt.

3, 4. Dem in Nr. **3**, 3 besprochenen Sachverhalte ähnlich ist der folgende:

Voraussetzung. 1. Es sei $\mathfrak{K}$ ein Kreis. Ferner sei $\mathfrak{C}$ ein einfacher Bogen, dessen Endpunkte P_0 und P_1 beide auf $\mathfrak{K}$ liegen (und verschieden sind). Außer P_0 und P_1 soll $\mathfrak{C}$ höchstens Stützpunkte in endlicher Zahl mit $\mathfrak{K}$ gemeinsam haben. Durch $\mathfrak{C}$ und einen der beiden Kreisbogen zwischen P_0 und P_1 wird eine *beschränkte* offene Menge O begrenzt, welche Summe endlich vieler, je von einer einfachen Kurve begrenzter Gebiete ist.

2. *Wir nehmen an, daß der Durchschnitt jeder hinreichend kleinen Umgebung von P_0 mit O in einen Winkelraum von kleinerer Öffnung als π und mit P_0 als Scheitel einbettbar ist.*

3. Es sei jetzt $\mathfrak{K}'$ ein zweiter Kreis, welcher durch P_0 geht und mit $\mathfrak{K}$ dort die Tangente gemeinsam hat.

Behauptung. a) *$(\mathfrak{K}' - P_0) \frown \mathfrak{C}$ kann nicht leer sein, sobald $\mathfrak{K}' \frown \mathsf{O}$ nicht leer ist.*

b) *$\mathfrak{K}'$ enthält in beliebiger Nähe von P_0 immer Punkte, die nicht zur abgeschlossenen Hülle von O gehören.*

Der *Beweis* ist leicht zu führen und mag deshalb übergangen werden.

§ 4. Erledigung des Falles A der Nr. 3, 22.

4, 1. Wir wählen im Innern von $\mathfrak{T}_2^*$ einen Punkt P_0 und betrachten die beiden Kreise $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}(P_0; \mathfrak{T}_1^*)$ und $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}(P_0; \mathfrak{T}_2^*)$; sie besitzen im gemeinsamen Punkt P_0 die gleiche Tangente (gemäß Nr. **3**, 1; I). Es sei nun $S_{2,1}$ der *unterste Schnittpunkt* von $\mathfrak{K}_2$ mit $\mathfrak{T}_2$, wo $\mathfrak{T}_2 = \overset{\frown}{Q_1 R_1}$. Ferner sei $S_{1,2k}$ der *oberste* Schnittpunkt von $\mathfrak{K}_1$ mit $\mathfrak{T}_1$ (unterhalb P_0). Gemäß Nr. **3**, 1; VI liegt der untere Endpunkt Q_1 von $\mathfrak{T}_2$ noch unterhalb von $S_{1,2k}$, so daß letzterer Punkt auch noch zu $\mathfrak{T}_2$ gehört, ebenso wie $S_{2,1}$. Andererseits beachte man, daß $S_{1,2k}$ der *einzige Schnitt*punkt von $\mathfrak{K}_1$ mit $\mathfrak{T}_2$ ist, welcher unterhalb P_0 liegt (gemäß Nr. **3**, 1; VI). Daraus ergibt sich:

4, 2. *$\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ haben keinen von P_0 verschiedenen Punkt gemeinsam.* In der Tat: Da $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ in P_0 die Tangente gemeinsam haben, genügt es, diese beiden Kreise als verschieden nachzuweisen. Dies folgt aber unmittelbar daraus, daß $\mathfrak{K}_1$ nur *einen* Schnittpunkt mit $\mathfrak{T}_2$ besitzt (Nr. **4**, 1), während $\mathfrak{K}_2$ der Definition (von $\mathfrak{T}_2$ und $\mathfrak{K}_2$) zufolge mindestens zwei Schnittpunkte mit $\mathfrak{T}_2$ aufweist (vgl. Nr. **3**, 1; II).

4, 3. Mit Hilfe der Feststellung (Nr. **4**, 2), daß $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ nur den Punkt P_0 gemeinsam haben, folgern wir jetzt aus der Annahme des Falles A einen Widerspruch.

4, 41. Wir bemerken zunächst: Gemäß Nr. **3**, 1; III müssen Schnittpunkte von $\mathfrak{K}_2$ mit $\mathfrak{T}_2$ in $\mathfrak{T}_2'$ liegen. Da aber $\mathfrak{T}_2'$ gleich dem offenen Kern von $\mathfrak{T}_1^*$ ist, da $\mathfrak{T}_1^*$ in $\mathfrak{Z}_1$ enthalten ist und da $S_{1,2k}$ gemäß Nr. **3**, 1; V unterhalb $\mathfrak{Z}_1$ liegt, so folgt: *Zwischen $S_{1,2k}$ und P_0 liegt auf $\mathfrak{B}$ mindestens ein Schnittpunkt von $\mathfrak{K}_2$ mit $\mathfrak{B}$*, welcher also insbesondere von P_0 und $S_{1,2k}$ verschieden ist. Der *oberste*, d. h. der am nächsten bei P_0 gelegene, *derartige Schnittpunkt sei $S_{2,2t}$.*

4, 42. a) Zur Vereinfachung der Ausdrucksweise bezeichnen wir im folgenden als das *Innere $J(\mathfrak{K}_1)$ von $\mathfrak{K}_1$* dasjenige, von $\mathfrak{K}_1$ begrenzte (nicht notwendig beschränkte) Gebiet, in welchem die Punkte einer unteren Umgebung von P_0 auf $\mathfrak{B}$ enthalten sind (abgesehen von P_0 selbst, welcher *auf* $\mathfrak{B}$ liegt); eine solche Umgebung existiert, da ja $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{K}_1$ keinen Teilbogen gemeinsam haben soll. Das Komplementärgebiet von $J(\mathfrak{K}_1)$ wird als das *Äußere $A(\mathfrak{K}_1)$* von $\mathfrak{K}_1$ bezeichnet.

b) *Abgesehen von etwa vorhandenen Stützpunkten verläuft $\mathfrak{B}$ zwischen $S_{1,2k}$ und P_0 ganz im Innern von $\mathfrak{K}_1$, unterhalb $S_{1,2k}$ zunächst im Äußeren von $\mathfrak{K}_1$.*

c) Da zwischen $S_{1,2k}$ und P_0 mindestens ein Schnittpunkt von $\mathfrak{K}_2$ mit $\mathfrak{B}$ liegt (zufolge Nr. **4**, 41) und da $\mathfrak{K}_1$ mit $\mathfrak{K}_2$ nur den (Stütz)-Punkt P_0 gemeinsam hat, so *muß $\mathfrak{K}_2$ ganz im Innern von $\mathfrak{K}_1$ verlaufen, abgesehen von P_0.*

4, 43. a) Es sei jetzt $S_{1,2k-1}$ unterhalb $S_{1,2k}$ auf $\mathfrak{B}$ der nächste *Schnitt*punkt von $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{K}_1$; ein solcher Schnittpunkt existiert gemäß Voraussetzung (Nr. **3**, 1; II). Es liegt Q_1 zwischen diesen beiden Punkten (Nr. **3**, 1; VI). Wegen $\mathfrak{T}_2 = \overset{\frown}{Q_1 R_1}$ liegt ferner $S_{2,1}$ gewiß oberhalb Q_1 also oberhalb $S_{1,2k-1}$ (und unterhalb P_0).

Nun verläuft aber $\mathfrak{B}$ zwischen $S_{1,2k-1}$ und $S_{1,2k}$ ganz im *Äußeren* von $\mathfrak{K}_1$, abgesehen von etwaigen Stützpunkten von $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{K}_1$ (vgl. Nr. **4**, 42; b)). Wegen Nr. **4**, 42; c) kann daher *der (auf $\mathfrak{T}_2$ unterste) Schnittpunkt $S_{2,1}$ mit $\mathfrak{K}_2$*, weil von P_0 verschieden, *nur zwischen $S_{1,2k}$ und P_0 auf $\mathfrak{B}$ liegen.*

b) Da überdies $S_{2,1}$ der auf $\mathfrak{T}_2$ unterste Schnittpunkt von $\mathfrak{T}_2$ mit $\mathfrak{K}_2$ ist, da also zwischen $S_{2,1}$ und Q_1 keine Schnittpunkte von $\mathfrak{T}_2$ mit $\mathfrak{K}_2$ auftreten, so liegen erst recht *zwischen $S_{1,2k}$ und $S_{2,1}$ auf $\mathfrak{B}$ keine Schnittpunkte von $\mathfrak{K}_2$ mit $\mathfrak{B}$.*

4, 44. a) Andererseits verläuft der auf $\mathfrak{K}_1$ unterhalb P_0 zwischen P_0 und $S_{1,2k}$ gelegene Bogen ganz auf der Seite $s^* = s_1 = s_2$ von $\mathfrak{B}$, wenn wir von etwa auf genanntem

Kreisbogen liegenden Stützpunkten mit $\mathfrak{B}$ absehen. Auf der gleichen Seite s^* verläuft $\mathfrak{K}_2$ in einer unteren Umgebung sowohl von P_0 als von $S_{2,1}$ auf $\mathfrak{K}_2$ (vgl. Nr. **3**, 1; IV).

b) *Insbesondere verläuft eine untere Umgebung von P_0 auf $\mathfrak{K}_2$ in der abgeschlossenen Hülle desjenigen beschränkten Gebietes, dessen Begrenzung gebildet wird durch die beiden unterhalb P_0 auf $\mathfrak{B}$ und auf $\mathfrak{K}_1$ gelegenen Bogen, welche sich bis zum ersten unterhalb P_0 gelegenen gemeinsamen Punkte von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{B}$ erstrecken.*

Das folgt aus Nr. **4**, 42; c) sowie Nr. **4**, 44; a).

4,45. Auf Grund der vorangehenden Feststellungen behaupten wir jetzt:

Es sei $\mathfrak{K}_2'$ der auf $\mathfrak{K}_2$ nach oben durch $S_{2,1}$, nach unten durch P_0 berandete Teilbogen von $\mathfrak{K}_2$. Dann verläuft $\mathfrak{K}_2'$ ganz in der abgeschlossenen Hülle $\overline{\Gamma}$ desjenigen beschränkten Gebietes Γ, welches begrenzt wird von den auf $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{K}_1$ nach oben durch P_0 und nach unten durch $S_{1,2k}$ berandeten Teilbogen. Übrigens gibt es keine Stützpunkte von $\mathfrak{T}_1$ auf $\mathfrak{K}_1$ zwischen $S_{2,1}$ und P_0.

Beweis. Es war $S_{2,1}$ der auf $\mathfrak{T}_2$ unterste Schnittpunkt von $\mathfrak{K}_2$ mit $\mathfrak{T}_2$. Da die gemeinsamen Punkte von $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{T}_2$ simultan-natürlich geordnet liegen auf $\mathfrak{K}_2$ *und* $\mathfrak{T}_2$, so enthält $\mathfrak{K}_2'$ überhaupt keine Schnittpunkte von $\mathfrak{K}_2$ mit $\mathfrak{T}_2$ (sämtliche Schnittpunkte von $\mathfrak{K}_2$ mit $\mathfrak{T}_2$, abgesehen von $S_{2,1}$, liegen vielmehr oberhalb $S_{2,1}$ und auf dem zu $\mathfrak{K}_2'$ komplementären Kreisbogen $(\mathfrak{K}_2 - \mathfrak{K}_2')$). Nun gehört aber eine untere Umgebung von $S_{2,1}$ auf $\mathfrak{K}_2$ zu $\mathfrak{K}_2'$. Und besagte Umgebung verläuft auf der nämlichen Seite s^* von $\mathfrak{B}$ wie der unterhalb P_0 gelegene, von P_0 und $S_{1,2k}$ berandete Teilbogen $\mathfrak{K}_1^*$ von $\mathfrak{K}_1$ (Nr. **4**, 44; a)). Da andererseits $\mathfrak{K}_2$, also erst recht $\mathfrak{K}_2'$, im Innern von $\mathfrak{K}_1$ liegt (abgesehen von P_0) (Nr. **4**, 42; c)) und da $S_{2,1}$ auf $\mathfrak{T}_1$ oberhalb $S_{1,2k}$ und unterhalb P_0 liegt (Nr. **4**, 43; a)), so verläuft $\mathfrak{K}_2'$ in der Tat „zwischen" $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{K}_1$, d. h. in $\overline{\Gamma}$. — Nehmen wir jetzt an, es würde zwischen $S_{2,1}$ und P_0 auf $\mathfrak{T}_1$ ein Stützpunkt T von $\mathfrak{T}_1$ mit $\mathfrak{K}_1$ liegen. Es möge T' der nächste derartige Stützpunkt oberhalb $S_{2,1}$ sein; ferner sei T'' der nächste Stützpunkt von $\mathfrak{T}_1$ mit $\mathfrak{K}_1$ unterhalb $S_{2,1}$ und oberhalb $S_{1,2k}$ oder, falls kein solcher Stützpunkt existiert, es sei $T'' = S_{1,2k}$. Dann verläuft $\mathfrak{K}_2'$ in der Umgebung von $S_{2,1}$ im Innern des durch die beiden Teilbogen von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{T}_1$ zwischen T' und T'' begrenzten (beschränkten) Gebietes Γ'. Da P_0 außerhalb Γ' und zugleich auf $\mathfrak{K}_2'$ liegt, so müßte $\mathfrak{K}_2'$ Punkte mit einem der beiden genannten Teilbogen von $\mathfrak{K}_1$ bzw. $\mathfrak{T}_1$ gemeinsam haben, was nicht der Fall ist. Damit ist die obige Behauptung bewiesen.

4, 46. Wir haben jetzt noch nachzuweisen, daß der in Nr. **4**, 45 behauptete Verlauf des Teilbogens $\mathfrak{K}_2'$ von $\mathfrak{K}_2$ nicht eintreten kann. Das folgt, mit Hilfe der in Nr. **3**, 4 und **4**, 44 bewiesenen Tatsachen, folgendermaßen:

Zunächst genügen $\mathfrak{K}_1$ und der zwischen P_0 und $S_{1,2k}$ (unterhalb P_0 auf $\mathfrak{B}$) gelegene Teilbogen von $\mathfrak{B}$ den Voraussetzungen 1 und 2 der Nr. **3**, 4 über $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{C}$. In der Tat: Setzt man $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1$, $P_0 = P_0$, $P_1 = S_{1,2k}$, $\mathsf{O} = \Gamma$, so ist zunächst Voraussetzung 1 sicher erfüllt. Aber auch Voraussetzung 2 ist befriedigt. Wegen der Konvexität von $\mathfrak{B}$ fällt nämlich die untere Halbtangente an $\mathfrak{B}$ in P_0 niemals zusammen mit der oberen Halbtangente an $\mathfrak{B}$ in P_0 oder, was das gleiche ist, mit der oberen Halbtangente an $\mathfrak{K}_1$ in P_0. Ferner liegt das jetzt in Frage kommende Gebiet Γ einerseits im Innern von $\mathfrak{K}_1$, also ganz auf derjenigen Seite der Kreistangente an $\mathfrak{K}_1$ in P_0, auf welcher auch die untere Umgebung von P_0 auf $\mathfrak{B}$ liegt; andererseits liegt O, d. h. Γ, ganz auf der einen Seite von $\mathfrak{B}$. Daher ist die Umgebung von P_0 auf Γ tatsächlich in einen Sektor von kleinerer Öffnung als π einbettbar.

Wir setzen jetzt noch $\mathfrak{K}' = \mathfrak{K}_2$. Zufolge Nr. **3**, 4 Behauptung b) gibt es nun gewisse Punkte von $\mathfrak{K}_2$ in beliebiger Nähe von P_0, welche *nicht* zu $\overline{\Gamma}$ gehören. Andererseits liegt aber

eine *obere* Umgebung von P_0 auf $\mathfrak{K}_2$ in $\overline{\Gamma}$ wegen Nr. **4**, 45; ferner gibt es zufolge Nr. **4**, 44; b) eine *untere* Umgebung von P_0 auf $\mathfrak{K}_2$, welche in $\overline{\Gamma}$ liegt, so daß eine volle Umgebung von P_0 auf $\mathfrak{K}_2$ zu $\overline{\Gamma}$ gehören müßte. Damit haben wir den gewünschten Widerspruch.

§ 5. Erledigung des Falles B der Nr. 3, 22.

5, 1. Gemäß den vorbereitenden Bemerkungen in Nr. **3**, 23 gehen wir aus von absteigenden Folgen $\{\mathfrak{T}_\nu\}$ und $\{\mathfrak{T}'_\nu\}$ bzw. $\{\mathfrak{T}^*_\nu\}$ offener bzw. abgeschlossener Teilbogen von $\mathfrak{B}$. Die $\mathfrak{T}^*_\nu$ haben dann mindestens einen Punkt P_0 gemeinsam. Zu einem solchen P_0 gibt es nach Annahme eine *Folge von Kreisen* $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}(P_0; \mathfrak{T}^*_\nu)$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, welche sämtlich in P_0 die *Trägergerade der oberen Halbtangente an* $\mathfrak{B}$ *in* P_0 *als gemeinsame Tangente* besitzen. Dabei liegen sämtliche $\mathfrak{K}_\nu$ auf der *gleichen* Seite der (Kreis-) Tangente in P_0; denn andernfalls gäbe es unter den $\mathfrak{K}_\nu$ solche, welche mit $\mathfrak{T}$ keine von P_0 verschiedenen Punkte gemeinsam haben.

Die $\mathfrak{K}_\nu$ *sind sämtlich voneinander verschieden*, so daß irgend zwei der $\mathfrak{K}_\nu$ lediglich den Punkt P_0 gemeinsam haben.

Der Beweis hierfür ergibt sich aus Nr. **4**, 2; die dort angestellte Überlegung gilt nämlich nicht nur für $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, sondern allgemein für $\mathfrak{K}_\mu$ und $\mathfrak{K}_\nu$ mit $\mu < \nu$. In der Tat bilden die $\mathfrak{T}_\varrho$ eine absteigende Teilbogenfolge, $\varrho = 1, 2, \ldots$ (gemäß Nr. **3**, 23). Nun hat aber $\mathfrak{K}_\mu$ mit $\mathfrak{T}_{\mu+1}$ genau *einen* Schnittpunkt gemeinsam, also mit $\mathfrak{T}_\nu$ höchstens einen, falls $\mu \leqq \nu - 1$; demgegenüber gibt es (mindestens) zwei Schnittpunkte von $\mathfrak{K}_\nu$ mit $\mathfrak{T}_\nu$.

5, 2. Bezüglich der gegenseitigen Lage der $\mathfrak{K}_\nu$ können wir aber noch weit genauere Aussagen machen. In dieser Hinsicht bemerken wir zunächst folgendes:

a) Nach Annahme (Fall B) gibt es immer untere Umgebungen von P_0 auf $\mathfrak{K}_\nu$ und $\mathfrak{K}_{\nu+1}$, welche auf *verschiedenen* Seiten von $\mathfrak{B}$ liegen (für alle $\nu \geqq 1$). Daraus folgt einmal, daß $\mathfrak{B}$ *in* P_0 *keine Ecke besitzen kann*; andernfalls würde ja die untere Halbtangente in P_0 an alle $\mathfrak{K}_\nu$ verschieden sein von der unteren Halbtangente an $\mathfrak{B}$ in P_0, und die $\mathfrak{K}_\nu$ würden nahe unterhalb P_0 sämtlich auf der gleichen Seite von $\mathfrak{B}$ liegen.

b) Weiter folgt:

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß $\mathfrak{B}$ *in hinreichender Nähe unterhalb* P_0 *im Innern der beschränkten, durch* $\mathfrak{K}_1$ *bestimmten Kreisscheibe* k_1 *verläuft.* In der Tat: Sollte eine untere Umgebung von P_0 auf $\mathfrak{B}$ im Äußeren von k_1 liegen, so verläuft eine untere Umgebung von P_0 auf jedem derjenigen $\mathfrak{K}_\nu$, welche etwa im Innern von k_1 liegen sollten, auf der gleichen Seite von $\mathfrak{B}$ wie eine untere Umgebung von P_0 auf $\mathfrak{K}_1$. Daher muß $\mathfrak{K}_2$ im Äußeren von k_1 verlaufen, und eine untere Umgebung von P_0 auf $\mathfrak{B}$ liegt im Innern der durch $\mathfrak{K}_2$ bestimmten beschränkten Kreisscheibe k_2. Lassen wir also im vorliegenden Falle die Folge unserer $\mathfrak{K}_\nu$ mit $\mathfrak{K}_2$ (statt mit wegzulassendem $\mathfrak{K}_1$) beginnen und schreiben $\mathfrak{K}_1$ statt $\mathfrak{K}_2$, usw., so liegt eine untere Umgebung von P_0 auf $\mathfrak{B}$ im Innern der k_1.

c) Die in b) angestellte Überlegung zeigt, daß allgemein folgende Annahme zulässig ist:

Eine untere Umgebung $\mathfrak{U}_n$ *von* P_0 *auf* $\mathfrak{B}$ *verläuft (abgesehen von* P_0*) im Innern oder Äußern der zu* $\mathfrak{K}_n$ *gehörigen beschränkten offenen Kreisscheibe* k_n*, je nachdem n ungerade oder gerade ist. Es verläuft also* $\mathfrak{U}_n$*, wenn hinreichend klein gewählt, ganz im Innern der*

von $\mathfrak{K}_{n-1}$ *und* $\mathfrak{K}_n$ *gebildeten abgeschlossenen Sichel:* $\Sigma_n = \overline{[(k_{n-1} + k_n) - (k_{n-1} \cap k_n)]}$ *für jedes* $n \geqq 2$ [20]). (Vgl. Nr. **3**, 3.)

d) Aus c) folgt weiter:

$\mathfrak{K}_{n+\tau}$ *für* $\tau \geqq 1$ *verläuft — abgesehen vom Punkte* P_0 *— ganz innerhalb der von* $\mathfrak{K}_{n-1}$ *und* $\mathfrak{K}_n$ *gebildeten Sichel* Σ_n (vgl. c). *Die* Σ_n *selbst bilden eine absteigende Folge.* In der Tat: Zufolge der Definition von $\mathfrak{K}_{n+1}$ liegen Schnittpunkte von $\mathfrak{K}_{n+1}$ mit $\mathfrak{B}$ unterhalb P_0 in $\mathfrak{T}'_{n+1}$ (Nr. **3**, 1; III). Zugleich ist aber $\mathfrak{T}'_{n+1}$ in $\mathfrak{T}^*_n$ enthalten; und auf $\mathfrak{T}^*_n$ liegen unterhalb P_0 keine Punkte von $\mathfrak{K}_n$ und ebensowenig von $\mathfrak{K}_{n-1}$. Wir beachten jetzt noch, daß $\mathfrak{B}$ in der Nähe unterhalb P_0 in der Sichel Σ_n verläuft. Daher liegt gewiß $\mathfrak{T}^*_n$ unterhalb P_0 in Σ_n. Und da, wie soeben bemerkt, $\mathfrak{T}^*_n$ Punkte unterhalb P_0 mit $\mathfrak{K}_{n+1}$ gemeinsam hat, so verläuft $\mathfrak{K}_{n+1}$ tatsächlich ganz in Σ_n, abgesehen von P_0. Daher ist Σ_{n+1} in Σ_n enthalten, Σ_{n+2} in Σ_{n+1} usw.; es gilt also allgemein $\Sigma_\nu < \Sigma_\mu$ für $\nu > \mu$. Da schließlich $\mathfrak{K}_{n+\tau}$ in $\Sigma_{n+\tau-1}$ verläuft, so verläuft $\mathfrak{K}_{n+\tau}$ auch in Σ_n, sobald $\tau \geqq 1$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

5, 3. Mit Hilfe des bisher Bewiesenen zeigen wir weiter:

1. *Der Durchschnitt von* Σ_n *mit* $\mathfrak{T}_1$ *enthält mindestens* $(n-1)$ *abgeschlossene, untereinander und zu* P_0 *fremde Teilbogen* $\mathfrak{C}^{(n)}_\varrho$ *von* $\mathfrak{T}_1$, *welche unterhalb* P_0 *liegen; dabei ist* $n \geqq 2$, $\varrho = 1, \ldots, n-1$. *Für jeden* $\mathfrak{C}^{(n)}_\varrho$ *liegt der eine Endpunkt auf* $\mathfrak{K}_{n-1}$, *der andere auf* $\mathfrak{K}_n$. 2. *Überdies bilden bei festem* ϱ *und wachsendem* n *die* $\mathfrak{C}^{(n)}_\varrho$ *für* $n \geqq \varrho + 1$ *eine absteigende Folge abgeschlossener Teilbogen von* $\mathfrak{T}_1$ ($\varrho \geqq 2$, *sonst beliebig*).

Beweis: Durch vollständige Induktion.

a) Zur Vereinfachung bezeichnen wir diejenigen beiden (voneinander verschiedenen) *Schnitt*punkte von $\mathfrak{K}_n$ und $\mathfrak{T}_1$, welche unterhalb von P_0 am nächsten bei P_0 liegen, mit $S^{(n)}_n$ und $S^{(n)}_{n+1}$; dabei soll $S^{(n)}_n$ unterhalb $S^{(n)}_{n+1}$ liegen (und $S^{(n)}_{n+1}$ unterhalb P_0). Wir behaupten:

Es liegen $S^{(n)}_n$ *und* $S^{(n)}_{n+1}$ *beide unterhalb von* $S^{(n+1)}_{n+1}$ *und von* $S^{(n+1)}_{n+2}$.

In der Tat: Nach Voraussetzung (Nr. **3**, 1; V) liegt weder $S^{(n)}_n$ noch $S^{(n)}_{n+1}$ auf $\mathfrak{T}^*_n$. In dessen Innern liegt aber (gemäß der Konstruktion von Nr. **3**, 22) $\mathfrak{T}'_{n+1}$ und dieser letztere Teilbogen enthält mindestens einen unterhalb P_0 gelegenen Schnittpunkt von $\mathfrak{K}_{n+1}$ mit $\mathfrak{B}$. Daher liegt mindestens $S^{(n+1)}_{n+2}$ in $\mathfrak{T}^*_n$, also gewiß oberhalb $S^{(n)}_{n+1}$. Nun verlaufen aber hinreichend kleine untere Umgebungen von P_0 auf $\mathfrak{K}_n$ bzw. auf $\mathfrak{K}_{n+1}$ auf verschiedenen Seiten s^*_n bzw. s^*_{n+1} von $\mathfrak{B}$ (Voraussetzung in dem hier behandelten Falle B). Im letzten Schnittpunkte unterhalb P_0, nämlich in $S^{(n+1)}_{n+2}$, tritt daher $\mathfrak{K}_{n+1}$, im Sinne der Orientierung von $\mathfrak{K}_{n+1}$ gerechnet, von s^*_n auf s^*_{n+1} über. Da $\mathfrak{K}_{n+1}$ mit $\mathfrak{K}_n$ nur den Punkt P_0 gemeinsam hat, so verläuft also $\mathfrak{K}_{n+1}$ unterhalb $S^{(n+1)}_{n+2}$ zunächst ganz in einem beschränkten, abgeschlossenen Bereiche, welcher durch je einen unterhalb P_0 zwischen P_0 und $S^{(n)}_{n+1}$ gelegenen Teilbogen von $\mathfrak{B}$ und von $\mathfrak{K}_n$ berandet ist. Diesen Bereich muß aber $\mathfrak{K}_{n+1}$ in einem von P_0 verschiedenen, nicht auf $\mathfrak{K}_n$ gelegenen Punkte wieder verlassen, denn der unterhalb $S^{(n+1)}_{n+2}$ gelegene, von $S^{(n+1)}_{n+2}$ und P_0 berandete Teilbogen von $\mathfrak{K}_{n+1}$ kann nicht ganz in genanntem Bereiche verlaufend zu P_0 zurückkehren (da $\mathfrak{K}_{n+1}$ keine Spitze hat). Daher muß $\mathfrak{K}_{n+1}$ noch (mindestens) einen auf $\mathfrak{T}_1$ zwischen $S^{(n)}_{n+1}$ und $S^{(n+1)}_{n+2}$ gelegenen *Schnitt*punkt besitzen; der am nächsten unterhalb $S^{(n+1)}_{n+2}$ gelegene derartige Schnittpunkt ist gerade $S^{(n+1)}_{n+1}$. Damit ist die Behauptung a) bewiesen.

---

[20]) Der Querstrich über [ ] bedeutet, daß die abgeschlossene Hülle der zwischen den eckigen Klammern stehenden Punktmenge gebildet werden soll.

b) Die 1. Behauptung des zu beweisenden Satzes ist richtig für $n = 2$. In der Tat: Zunächst enthält der abgeschlossene, unterhalb R_1 gelegene Teilbogen von $\mathfrak{T}_1$, welcher P_0 und $S_3^{(2)}$ als Endpunkte besitzt, in seinem Innern keinen Schnittpunkt von $\mathfrak{K}_2$ (oder $\mathfrak{K}_1$) mit $\mathfrak{T}_1$; und da eine untere Umgebung von P_0 auf $\mathfrak{B}$ ganz zu $\mathfrak{S}_2$ gehört, liegt auch besagter Bogen ganz in $\mathfrak{S}_2$. (Das eventuelle Auftreten von Stützpunkten des betrachteten Bogens mit $\mathfrak{K}_1$ oder $\mathfrak{K}_2$ würde keine Komplikationen bringen, da $\mathfrak{S}_2$ als abgeschlossen angenommen ist.) Unterhalb $S_3^{(2)}$ verläuft $\mathfrak{T}_1$ zunächst außerhalb $\mathfrak{S}_2$, d. h. im Innern der Kreisscheibe k_2 (vgl. Nr. **5**, 2; c)), und tritt bei $S_2^{(2)}$, zum ersten Male unterhalb $S_3^{(2)}$, wieder in $\mathfrak{S}_2$ ein. Der nächste *auf* $\mathfrak{K}_1$ *unterhalb* $S_2^{(2)}$ gelegene Punkt von $\mathfrak{T}_1$ ist $S_2^{(1)}$, wo $\mathfrak{T}_1$ (zum ersten Male) ins Äußere von k_1 übertritt, also wieder aus $\mathfrak{S}_2$ austritt. Bezeichnen wir den zu $S_2^{(1)}$ oberhalb *nächstgelegenen* Schnittpunkt aus $\mathfrak{T}_1 \frown \mathfrak{K}_2$ mit $S_0^{(2)}$ und setzen $S_0^{(1)} = S_2^{(1)}$, so ist der von $S_0^{(2)}$ und $S_0^{(1)}$ begrenzte Teilbogen $\mathfrak{C}_1^{(2)}$ von $\mathfrak{T}_1$ ganz in $\mathfrak{S}_2$ enthalten, fremd zu P_0 und sein einer Endpunkt liegt auf $\mathfrak{K}_2$, sein anderer auf $\mathfrak{K}_1$. Es gibt also in der Tat mindestens einen, abgeschlossenen Teilbogen von $\mathfrak{T}_1$, welcher bezüglich $\mathfrak{S}_2$ die in der 1. Behauptung verlangten Eigenschaften besitzt.

c) Wir nehmen jetzt an, die 1. Behauptung sei bereits für alle $n \leqq n_0$ bewiesen ($2 \leqq n_0$). Wir zeigen, daß sie auch für $(n_0 + 1)$ gilt. Zur Vereinfachung schreiben wir n statt n_0 und betrachten $\mathfrak{S}_n$. Der Durchschnitt von $\mathfrak{S}_n$ mit dem unterhalb P_0 gelegenen (abgeschlossenen) Teilbogen $\mathfrak{T}_1$ enthalte also (mindestens) $n - 1$ untereinander und zu P_0 fremde abgeschlossene Bogen $\mathfrak{C}_\varrho^{(n)}$, $\varrho = 1, \ldots, n-1$. Der auf $\mathfrak{K}_{n-1}$ gelegene Endpunkt von $\mathfrak{C}_\varrho^{(n)}$ sei bezeichnet mit $S_{\varrho-1}^{(n-1)}$, der auf $\mathfrak{K}_n$ gelegene mit $S_{\varrho-1}^{(n)}$. (Für $n = 2$ ist $\varrho - 1 = 0$, so daß Übereinstimmung mit der in b) benutzten Bezeichnung besteht.) Die Numerierung der $S_\tau^{(n-1)}$ usw. ($\tau = 0, 1, \ldots, n-2$) bei festem n sei dabei so gewählt, daß $S_\tau^{(n-1)}$ unterhalb $S_{\tau+1}^{(n-1)}$ liegt und $S_\tau^{(n)}$ unterhalb $S_{\tau+1}^{(n)}$ im Sinne der Orientierung von $\mathfrak{B}$. Dann liegt, weil die $\mathfrak{C}_\varrho^{(n)}$ paarweise fremd und $S_\tau^{(n)}$, $S_\tau^{(n-1)}$ die Endpunkte von $\mathfrak{C}_{\tau+1}^{(n)}$ sind, $S_\tau^{(n-1)}$ auch unterhalb $S_{\tau+1}^{(n)}$ auf $\mathfrak{B}$ und $S_\tau^{(n)}$ unterhalb $S_{\tau+1}^{(n-1)}$. Um $\mathfrak{S}_{n+1}$ zu erhalten, haben wir jetzt $\mathfrak{K}_{n+1}$ heranzuziehen. Dazu bezeichnen wir den größten, P_0 enthaltenden, unterhalb P_0 und ganz in $\mathfrak{S}_n$ gelegenen Teilbogen von $\mathfrak{T}_1$ mit $\mathfrak{C}_n$. Zufolge der Definition von $\mathfrak{K}_{n+1}$ liegt in $\mathfrak{C}_n$ mindestens ein Schnittpunkt von $\mathfrak{T}_1$ mit $\mathfrak{K}_{n+1}$. Zufolge Beweis a) existieren dann sogar mindestens zwei, von P_0 verschiedene Schnittpunkte von $\mathfrak{K}_{n+1}$ mit $\mathfrak{T}_1$; die beiden am nächsten bei P_0 gelegenen wurden bereits früher mit $S_{n+1}^{(n+1)}$ und $S_{n+2}^{(n+1)}$ bezeichnet. Ferner folgt aus Nr. **3**, 3 wegen Nr. **5**, 2; d, daß $\mathfrak{K}_{n+1}$ mit jedem der $(n-1)$ Teilbogen $\mathfrak{C}_\varrho^{(n)}$ ($\varrho = 1, \ldots, n-1$) mindestens einen Schnittpunkt gemeinsam hat. Bezeichnet man den am nächsten bei $S_{\varrho-1}^{(n)}$ gelegenen *Schnitt*punkt von $\mathfrak{C}_\varrho^{(n)}$ mit $\mathfrak{K}_{n+1}$ durch $S_{\varrho-1}^{(n+1)}$, so hat der von $S_{\varrho-1}^{(n+1)}$ und von $S_{\varrho-1}^{(n)}$ begrenzte Teilbogen $\mathfrak{C}_\varrho^{(n+1)}$ von $\mathfrak{C}_\varrho^{(n)}$ alle verlangten Eigenschaften, $\varrho = 1, \ldots, n-1$. Zu diesen $\mathfrak{C}_\varrho^{(n+1)}$ tritt als n-ter noch derjenige Teilbogen $\mathfrak{C}_n^{(n+1)}$ hinzu, welcher von $S_{n+1}^{(n)}$ und von dem am nächsten oberhalb von $S_{n+1}^{(n)}$ gelegenen, etwa mit $S_{n-1}^{(n+1)}$ zu bezeichnenden Schnittpunkte von $\mathfrak{K}_{n+1}$ mit $\mathfrak{C}_n$ berandet wird. (Der Symmetrie wegen kann man $S_{n+1}^{(n)} = S_{n-1}^{(n)}$ setzen.) Man beweist die Existenz dieses $\mathfrak{C}_n^{(n+1)}$ durch Überlegungen, welche ganz den in b) angegebenen entsprechen. Damit ist der Induktionsschluß vollendet und zugleich die 2. Behauptung unseres Satzes bewiesen.

5, 4. Aus dem Satze der Nr. **5**, 3 folgt unmittelbar: Jeder Kreis $\mathfrak{K}_\tau$ mit $\tau \geqq n + 1$ hat mit jedem der Teilbogen $\mathfrak{C}_\varrho^{(n)}$, $\varrho = 1, \ldots, n-1$, von $\mathfrak{T}_1$ mindestens einen Schnitt-

punkt gemeinsam; und diese Schnittpunkte liegen sämtlich in $\mathfrak{T}_1$. Wählt man nun, was wegen der Kompaktheit der Menge der $\mathfrak{K}_\tau$ im Raume aller Kreise möglich ist [21]), aus dieser Menge eine Teilfolge $\{\mathfrak{K}'_\tau\}$ aus, welche gleichmäßig gegen einen Grenzkreis $\mathfrak{K}_0$ konvergiert, so hat dieser $\mathfrak{K}_0$ mit dem Durchschnitt der (bei festem ϱ) absteigenden Folge abgeschlossener Mengen $\mathfrak{C}_\varrho^{(\varrho+1)}, \mathfrak{C}_\varrho^{(\varrho+2)}, \mathfrak{C}_\varrho^{(\varrho+3)}, \ldots$ mindestens einen Punkt L_ϱ gemeinsam (ϱ fest; $\varrho = 1, 2, \ldots$). Nun sind aber die $\mathfrak{C}_{\varrho_1}^{(n)}$, $\mathfrak{C}_{\varrho_2}^{(n)}$ für $\varrho_1 \neq \varrho_2$ fremd (und abgeschlossen); also gilt dies allgemein für $\mathfrak{C}_{\varrho_1}^{(n_1)}, \mathfrak{C}_{\varrho_2}^{(n_2)}$ mit $\varrho_1 \neq \varrho_2$; $n_1 \geqq \varrho_1 + 1$, $n_2 \geqq \varrho_2 + 1$. Daher sind die Punkte L_ϱ, $\varrho = 1, 2, \ldots$ sämtlich verschieden. M. a. W.: $\mathfrak{K}_0$ ist kein Nullkreis und hat sogar mit $\mathfrak{T}_1$ unendlich viele untereinander und von P_0 verschiedene Punkte gemeinsam (welche sich gegen P_0 häufen). Dies widerspricht unserer ursprünglichen Annahme, daß $\mathfrak{B}$ von *endlicher* zyklischer Ordnung sei.

§ 6. Bemerkung für den Fall einer K_2-Ordnung.

Die Überlegungen der §§ 4 und 5 bleiben i. w. richtig, wenn man in den Voraussetzungen I—VI des § 3 an Stelle des Büschels der durch P mit einer bestimmten festen Tangentenrichtung gehenden Kreise treten läßt: Das Büschel der Geraden mit dem gemeinsamen Punkte P. In der Tat wird (in §§ 4, 5) bei Erledigung der beiden (einzig möglichen) Fälle A und B wesentlich nur benützt: *Erstens* die Eigenschaft der Kreise, daß zwei durch den gleichen Punkt P mit der gleichen Tangentenrichtung gehende Kreise einen von P verschiedenen Punkt dann und nur dann gemeinsam haben, wenn sie identisch sind. *Zweitens* die in Nr. **3**, 3, **3**, 4 und **4**, 45 bewiesenen Tatsachen. Beides bleibt aber i. w. bestehen, wenn an Stelle besagter (parabolischer) Kreisbüschel durch P das Geradenbüschel durch P tritt. Läßt man also in § 3, I—VI Gerade an die Stelle von Kreisen treten, so ergeben sich gemäß § 4 und § 5 stets Widersprüche. Ein die Forderungen § 3, I—VI erfüllendes (normiertes) System von Geraden erhält man aber, sobald man $\mathfrak{B}$ als ordnungshomogen von mindestens dritter und höchstens endlicher linearer Ordnung voraussetzt; man braucht nur die früher [22]) angegebenen Überlegungen zu wiederholen.

Unsere vorangehenden Ausführungen enthalten also zugleich einen Beweis des Existenzsatzes für die lineare Ordnung in der Ebene.

---

[21]) Der Raum aller Kreise ist hierbei in geeigneter Weise metrisiert zu denken. Vgl. auch die Durchführung der in [19]) erwähnten Konstruktion.

[22]) Vgl. a. a. O. [4]), Nr. **2**, 8.

Eingegangen am 26. März 1937.

Ein Konvergenzsatz für trigonometrische Integrale.

Von *J. Karamata* in Beograd.

1. Im folgenden möchte ich einen Konvergenzsatz (Satz A) herleiten [1]), der zu dem Rießschen [2]) Satz in derselben Beziehung steht wie der Riemannsche [3]) Satz über trigonometrische Reihen zu dem von Fatou [4]).

Fatouscher Satz. *Falls*

$$u_n \to 0 \quad bei \quad n \to \infty ,$$

so konvergiert die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$$

in jedem Punkt des Kreises $|z| = 1$, *wo* $f(z)$ *regulär ist.*

Riemannscher Satz. *Falls*

$$a_n \to 0,\ b_n \to 0 \ bei \ n \to \infty ,$$

also

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

vorhanden ist, so konvergiert die trigonometrische Reihe $\sum_n (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ *gegen*

$$\lim_{\omega = \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\sin \omega t}{t} F''(x+t)\, dt$$

überall, wo $F''(x)$ *und der vorstehende Grenzwert vorhanden sind* [5]).

---

[1]) Mit derselben Methode wie hier habe ich bereits in der Arbeit: Un théorème sur les intégrales trigonométriques, C. R. du II. Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves, Praha 1934 (1935), S. 147—149, anschließend an meine Arbeit: Weiterführung der Wienerschen Methode, Math. Zeit. **39** (1934), S. 701—708 (vgl. auch E. Ingham, On Wiener's method in tauberian theorems, Proc. Lond. Math. Soc. (2) **38** (1935), S. 458—480) einen dem Satz A ähnlichen Satz erhalten, der sich auf die Konvergenz der Integrale von der Form $\int_0^{\infty} \cos xt\, a(t)\, dt$ im Punkte $x = 0$ bezieht. Inzwischen gab F. Wolf (On the (C, k)-summability of a trigonometrical integral, Proc. Lond. Math. Soc. (2) **40** (1936), S. 502—523) einen gleichartigen Satz (Th. 12, S. 516) über die Integrale $\int_0^{\infty} e^{xui}\, d\{c(u)\}$, wo statt (I) nur $c(u') - c(u) \to 0$ bei $u \to \infty$, für $u \leqq u' \leqq u + 1$, vorausgesetzt wird, also ohne die Heilbronn-Landausche Verfeinerung (vgl. E. Landau, Über Dirichletsche Reihen, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen I, Nr. 30 (1932), S. 525—527).

[2]) M. Riesz, Über Summierbarkeit durch typische Mittel, Acta Lit. ac Scient. Univ. Hung. Szeged **2** (1924), S. 18—31.

[3]) B. Riemann, Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe, Ges. Werke, S. 244—259.

[4]) P. Fatou, Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta Math. **30** (1906), S. 389.

[5]) Ersichtlich ist im Fatouschen Satze die Regularität von $f(z)$ nicht erforderlich, wie dies aus dem Rieszschen Satz folgt (vgl. auch M. Riesz, Über einen Satz des Herrn Fatou, Journ. für reine und angewandte Math. **140** (1911), S. 89—99, und L. Neder, Zur Theorie der trigonometrischen Reihen, Math. Ann. **84** (1921), S. 117—124).

Rieszscher Satz. *Für $u \geqq 0$ sei $c(u)$ von beschränkter Schwankung in jedem endlichen Intervall und*

$$|c(u') - c(u)| \to 0 \quad \text{für} \quad u \leqq u' \leqq u + h,\ u \to \infty\ ^{6}),$$

also

$$L(s) = \int_0^\infty e^{-su} d\{c(u)\} \text{ konvergent für } R(s) > 0;$$

dann konvergiert das Integral in jedem Punkt einer Strecke der Geraden $\sigma = R(s) = 0$, in deren Umgebung $L(s)$ beschränkt ist und in dem die fast überall existierende Randfunktion $L(\sigma)$ irgendeine der Konvergenzbedingungen einer Fourierreihe erfüllt. Das Integral konvergiert gleichmäßig auf jeder inneren Teilstrecke einer beliebigen Strecke, wo diese Bedingungen gleichmäßig erfüllt sind.

Satz A. *Sei $c(u)$ von beschränkter Schwankung in jedem endlichen Intervall und, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, $c(u) = 0$ in der Umgebung von $u = 0$. Ist*

$$\text{(I)} \qquad \limsup_{u=0} \operatorname{Max}_{u \leqq u' \leqq u+h} |c(\pm u') - c(\pm u)| \leqq w(h) \quad \text{für ein} \quad h > 0,$$

also

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xui} \frac{d\{c(u)\}}{(ui)^2}$$

gleichmäßig konvergent für jedes reelle x, und

$$F(t) = \iint f(t)\, dt + At + B \text{ für } |t - x| < 4\lambda,$$

so ist

$$\text{(II)} \quad \limsup_{\omega=\infty} \left| \int_{-\omega}^{\omega} e^{xui}\, d\{c(u)\} - \frac{1}{\pi} \int_{-4\lambda}^{4\lambda} \frac{\sin \omega t}{t} f(x+t)\, dt \right| \leqq 2(1 + h\,|x|)\, W_\lambda(h)$$

mit

$$W_\lambda(h) = 3\,\frac{\lg 2}{\pi}\,\frac{w(h)}{\lambda h} + w(h).$$

Wird in diesem Satze $c(u) = 0$ für $u \leqq 0$ gesetzt, so folgt daraus unmittelbar der Rieszsche Satz, weil nach der Voraussetzung dieses Satzes $w(h) = 0$ ist und aus der Beschränktheit von $L(s) = \int_0^\infty e^{-su} d\{c(u)\}$ folgt, daß $F(x) = \iint f(x)\, dx + Ax + B$ ist. Wird hingegen $c(u) = a(u) - ib(u)$ gesetzt und $c(-u) = \bar{c}(u)$ vorausgesetzt, so stellt dieser Satz eine Erweiterung des Riemannschen Satzes auf trigonometrische Integrale von der Form

$$\int_0^\infty [\cos ux\, d\{a(u)\} + \sin ux\, d\{b(u)\}]$$

dar, wie auch auf trigonometrische Reihen der Form $\Sigma(a_n \cos \lambda_n x + b_n \sin \lambda_n' x)$.

Aus Satz A ist zu ersehen, daß aus (II) auch für diese Reihen und Integrale die Konvergenz an einer Stelle x nur vom Verhalten von $F(x)$ in der unmittelbaren Um-

---

[6]) Statt dieser Bedingung gibt M. Riesz die Bedingung

$$e^{-\alpha x} \int_0^x e^{\alpha u} d\{c(u)\} \to 0, \quad x \to \infty, \quad \text{für irgendein } \alpha > 0$$

an, welche ihr aber vollständig äquivalent ist (vgl. M. Riesz, Ein Konvergenzsatz für Dirichletsche Reihen, Acta Math. **40** (1916), 357—361, und J. Karamata, Über einen Konvergenzsatz des Herrn Knopp, Math. Zeit. **40** (1935), 421—425; Über einige reihentheoretische Sätze, Math. Zeit. **41** (1936), 67—74).

gebung dieser Stelle abhängt, falls $w(h) = o(h)$ bei $h \to 0$ ist[7]). Wird aber nur $w(h) = o(1)$ vorausgesetzt, so kann die Konvergenz erst dann erschlossen werden, wenn

$$F(x) = \int\int f(x)\, dx + Ax + B$$

für jedes x gilt.

Für trigonometrische Reihen $\Sigma(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ ist dies unmittelbar einleuchtend, weil daraus wegen

$$2\pi(a_n + ib_n) = n^2 \int_0^{2\pi} F(x)\, e^{nix}\, dx$$

a_n bzw. $b_n = o(1)$, also $w(h) = 0$ folgt. Entsprechendes dürfte auch für allgemeine trigonometrische Reihen oder Integrale gelten.

2. Beim Beweis des Satzes A wird mehrmals von der folgenden, bekannten Tatsache Gebrauch gemacht.

Es seien $f(t)$ und $g(t)$ zwei reelle oder komplexe Funktionen der reellen Veränderlichen t, beide von beschränkter Schwankung in jedem endlichen Intervall; dann ist erstens

$$(1) \qquad \left| \int_a^b f(t) d\{g(t)\} \right| \leqq \{|f(b)| + \int_a^b |d\{f(t)\}|\} \operatorname*{Max}_{a \leqq t \leqq b} |g(t) - g(a)|;$$

zweitens folgt aus

$$|g(t') - g(t)| \leqq M \quad \text{für jedes} \quad t \leqq t' \leqq t + h \quad \text{und ein} \quad h > 0$$

die Ungleichung

$$(2) \qquad |g(T) - g(t)| \leqq \frac{M}{h}(T - t + h) \quad \text{für jedes} \quad t \leqq T.$$

Hilfssatz 1. *Sei $c(u)$ von beschränkter Schwankung in jedem endlichen Intervall, $c(u) = 0$ in der Umgebung von $u = 0$ und*

$$(3) \qquad \limsup_{u = \infty} \operatorname*{Max}_{u \leqq u' \leqq u + h} |c(\pm u') - c(\pm u)| \leqq w(h) \quad \textit{für ein} \quad h > 0.$$

Dann gilt:

1. *Das Integral*

$$(4) \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xui} \frac{d\{c(u)\}}{(ui)^2}$$

ist gleichmäßig konvergent für jedes endliche x.

2. *Das Integral*

$$C_x(u) = \int_u^{-u} e^{xti}\, d\{c(t)\}$$

genügt der Bedingung

$$(5) \qquad |C_x(u) - C_x(v)| \leqq 2(1 + h|x|) \frac{w(h) + \varepsilon}{h}(u - v + h) \quad \textit{für jedes} \quad v \leqq u,$$

wo $\varepsilon > 0$ mit $\frac{1}{v}$ beliebig klein gewählt werden kann.

---

[7]) Hier sei bemerkt, daß schon aus dieser Bedingung $\left(\text{sogar aus } \liminf_{h=0} \frac{w(h)}{h} = 0\right)$ folgt, daß $w(h) = 0$ für jedes $h > 0$ ist; dies folgt unmittelbar aus der für beliebige positive h und h' gültigen Ungleichung $w(h') \leqq \left(1 + \frac{h'}{h}\right) w(h)$, welche leicht aus der Definition von $w(h)$ zu erhalten ist.

Beweis. 1. Es ist für $0 < m < n$, wegen (1),

$$\left|\int_{mh}^{nh} e^{\pm xui}\frac{d\{c(\pm u)\}}{(ui)^2}\right| \leqq \sum_{\nu=m}^{n-1}\left|\int_{\nu h}^{\nu h+h} e^{\pm xui}\frac{d\{c(\pm u)\}}{(ui)^2}\right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{\nu=m}^{n-1}\left\{\frac{1}{(\nu+1)^2h^2}+\int_{\nu h}^{\nu h+h}\left(\frac{|x|}{u^2}+\frac{2}{u^3}\right)du\right\}\operatorname*{Max}_{\nu h\leqq t\leqq \nu h+h}|c(\pm t)-c(\pm \nu h)|,$$

also, wegen (3),

$$\left|\int_{mh}^{nh} e^{\pm xui}\frac{d\{c(\pm u)\}}{(ui)^2}\right| \leqq (w(h)+\varepsilon)\int_{mh}^{nh}\left\{\frac{1+|x|}{u^2}+\frac{2}{u^3}\right\}du < \frac{w(h)+\varepsilon}{mh}\left(1+|x|+\frac{1}{mh}\right).$$

2. Wegen (1) und (3) ist für $v \leqq v' \leqq v+h$

$$|C_x(v')-C_x(v)| \leqq \left|\int_v^{v'} e^{xti}\,d\{c(t)\}\right| + \left|\int_v^{v'} e^{-xti}\,d\{c(-t)\}\right| \leqq 2(1+h|x|)\,(w(h)+\varepsilon),$$

woraus wegen (2) die Behauptung (5) folgt.

Hilfssatz 2. Es konvergiere das Integral

$$F(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{tui}\frac{d\{c(u)\}}{(ui)^2} \tag{6}$$

gleichmäßig für $|t-x| \leqq 4\lambda$, *und es sei in diesem Intervall*

$$F(t)=\iint f(t)\,dt+At+B;$$

ist außerdem

$$C_x(u)=\int_{-u}^{u} e^{xti}\,d\{c(t)\}=o(u^4) \quad bei \quad u\to\infty, \tag{7}$$

so ist

$$\int_{-4\lambda}^{4\lambda}\frac{\sin\omega t}{t}k\left(\frac{|t|}{4\lambda}\right)f(x+t)\,dt=\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\lambda u}{\lambda u}\right)^4 C_x(u+\omega)\,du \quad für \quad \omega\geqq 0, \tag{8}$$

mit

$$k(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}-4x^2+4x^3 & für \quad 0\leqq x\leqq\frac{1}{2},\\ \frac{4}{3}(1-x)^3 & für \quad \frac{1}{2}\leqq x\leqq 1,\\ 0 & für \quad 1\leqq x\leqq\infty.\end{cases}$$ [8])

Beweis. Wegen $k(1)=k'(1)=0$ ist

$$J_\omega(x)=\int_{-4\lambda}^{4\lambda}\frac{\sin\omega t}{t}k\left(\frac{|t|}{4\lambda}\right)f(x+t)\,dt=\int_{-4\lambda}^{4\lambda}\left\{\frac{\sin\omega t}{t}k\left(\frac{|t|}{4\lambda}\right)\right\}''F(x+t)\,dt,$$

und wegen der gleichmäßigen Konvergenz von (6) ist

$$J_\omega(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{xui}\frac{d\{c(u)\}}{(ui)^2}\int_{-4\lambda}^{4\lambda}\left\{\frac{\sin\omega t}{t}k\left(\frac{|t|}{4\lambda}\right)\right\}''e^{tui}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{xui}d\{c(u)\}\int_{-4\lambda}^{4\lambda}\frac{\sin\omega t}{t}k\left(\frac{|t|}{4\lambda}\right)e^{tui}\,dt,$$

da $k(1)=k'(1)=0$ ist. Es ist aber (vgl. Fußnote [8]))

$$\int_{-4\lambda}^{4\lambda}\frac{\sin\omega t}{t}k\left(\frac{|t|}{4\lambda}\right)e^{tui}\,dt=\frac{1}{2}\int_{-\omega}^{\omega}dv\int_{-4\lambda}^{4\lambda}e^{(u+v)ti}\,k\left(\frac{|t|}{4\lambda}\right)dt=\lambda\int_{-\omega}^{\omega}\left\{\frac{\sin\lambda(u+v)}{\lambda(u+v)}\right\}^4 dv,$$

---

[8]) Es ist (vgl. meine unter [1]) zitierte zweite Note, Hilfssatz 1, S. 703) für irgendein $g(t)$:

$$(2\lambda)^{-3}\int_{-\lambda}^{+\lambda}\cdots\int g(t_1+t_2+t_3+t_4)\,dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4=\int_{-4\lambda}^{4\lambda}g(t)\,k\left(\frac{|t|}{4\lambda}\right)dt.$$

so daß

$$(9)\qquad J_\omega(x)=\lambda\int_{-\infty}^{\infty}e^{xui}\,d\{c(u)\}\int_{-\omega}^{\omega}\left\{\frac{\sin\lambda(u+v)}{\lambda(u+v)}\right\}^4dv=\lambda\int_{-\infty}^{\infty}e^{xui}\,d\{c(u)\}\int_{u-\omega}^{u+\omega}S(v)\,dv,$$

ist, wobei

$$S(v)=\left(\frac{\sin\lambda v}{\lambda v}\right)^4$$

gesetzt worden ist. Andererseits ist

$$\int_0^m e^{xui}d\{c(u)\}\int_{u-\omega}^{u+\omega}S(v)\,dv=\int_0^m e^{xui}d\{c(u)\}\int_{m-\omega}^{m+\omega}S(v)\,dv-\int_0^m\{S(u+\omega)-S(u-\omega)\}du\int_0^u e^{xti}d\{c(t)\}$$
$$=\int_0^m e^{xui}d\{c(u)\}\int_{u-\omega}^{u+\omega}S(v)\,dv+\int_{-m}^0 S(u-\omega)\,du\int_{-u}^0 e^{xti}d\{c(t)\}+\int_0^m S(u-\omega)\,du\int_0^u e^{xti}d\{(c(t)\},$$

$$\int_{-m}^0 e^{xui}d\{c(u)\}\int_{u-\omega}^{u+\omega}S(v)\,dv=-\int_0^{-m}e^{xui}d\{c(u)\}\int_{-m-\omega}^{-m+\omega}S(v)\,dv-\int_{-m}^0\{S(u+\omega)-S(u-\omega)\}du\int_0^u e^{xti}d\{c(t)\}$$
$$=\int_{-m}^0 e^{xui}d\{c(u)\}\int_{m-\omega}^{m+\omega}S(v)\,dv+\int_0^m S(u-\omega)\,du\int_{-u}^0 e^{xti}d\{c(t)\}+\int_{-m}^0 S(u-\omega)\,du\int_0^u e^{xti}d\{c(t)\},$$

also ist

$$\int_{-m}^m e^{xui}d\{c(u)\}\int_{u-\omega}^{u+\omega}S(v)\,dv=C_x(m)\int_{m-\omega}^{m+\omega}S(v)\,dv+\int_{-m}^m S(u-\omega)\,C_x(u)\,du,$$

woraus wegen (7), bei $m\to\infty$, und (9) die Behauptung (8) folgt.

Beweis des Satzes A. Es ist nur noch zu zeigen, daß (II) aus (5) und (8) folgt. Sei

$$D_\omega(x)=\int_{-4\lambda}^{4\lambda}\frac{\sin\omega t}{t}\,k\left(\frac{|t|}{4\lambda}\right)f(x+t)\,dt-\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4dt\int_{-\omega}^{\omega}e^{xui}d\{c(u)\}$$

gesetzt; dann ist wegen (8)

$$D_\omega(x)=\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\lambda u}{\lambda u}\right)^4C_x(u+\omega)\,du-\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\lambda u}{\lambda u}\right)^4C_x(\omega)\,du$$
$$=\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\lambda u}{\lambda u}\right)^4\{C_x(u+\omega)-C_x(\omega)\}\,du,$$

also wegen (5),

$$|D_\omega(x)|\leqq 2(1+h\,|x|)\,\frac{w(h)+\varepsilon}{h}\,\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\lambda u}{\lambda u}\right)^4(|u|+h)\,du.$$

Dies liefert endlich, daß

$$\limsup_{\omega=\infty}\left|\int_{-\omega}^{\omega}e^{xui}d\{c(u)\}-\frac{3}{2\pi}\int_{-4\lambda}^{4\lambda}\frac{\sin\omega t}{t}\,k\left(\frac{|t|}{4\lambda}\right)f(x+t)\,dt\right|\leqq\frac{3}{\pi}(1+h\,|x|)\,w(h)\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4\left(1+\frac{|t|}{\lambda h}\right)dt$$

ist, woraus die Behauptung (II) folgt, da

$$\int_0^\infty\left(\frac{\sin u}{u}\right)^4du=\frac{\pi}{3},\quad\int_0^\infty\left(\frac{\sin u}{u}\right)^4udu=\log 2\quad\text{und}\quad k(0)=\frac{2}{3}\ \text{ist.}$$

Eingegangen am 3. Mai 1937.

Über die Zerlegung quadratischer Formen in Quadrate.

Von *Hel Braun* in Frankfurt-Main.

$\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ seien symmetrische Matrizen mit ganzen Elementen. Die Zeilenanzahl von $\mathfrak{S}$ sei m, diejenige von $\mathfrak{T}$ sei n, und es werde immer $n \leqq m$ vorausgesetzt. Die zu einer beliebigen Matrix $\mathfrak{A}$ transponierte werde mit $\mathfrak{A}'$ bezeichnet. Bedeutet dann $\mathfrak{x}$ eine einspaltige Matrix mit m Elementen, $\mathfrak{y}$ eine ebensolche mit n Elementen, so werde weiter vorausgesetzt, daß die quadratischen Formen $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y}$ positiv definit seien.

Man kann jetzt nach der Anzahl der Substitutionen $\mathfrak{x} = \mathfrak{C}\mathfrak{y}$ fragen, für die $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ übergeht in $\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y}$; dabei soll $\mathfrak{C}$ ganz sein, das heißt lauter ganze Elemente enthalten. Die Anzahl dieser $\mathfrak{C}$ nennt man dann die Anzahl der Darstellungen von $\mathfrak{T}$ durch $\mathfrak{S}$. Sie werde mit $A(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$ bezeichnet. Notwendig und hinreichend dafür, daß eine Matrix $\mathfrak{C}$ die gewünschte Eigenschaft hat, ist, daß sie der Matrizengleichung

$$\mathfrak{C}'\mathfrak{S}\mathfrak{C} = \mathfrak{T} \tag{1}$$

genügt.

In der Folge soll nach dem Wert von $A(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$ gefragt werden für den Fall, daß $\mathfrak{S}$ die Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$ bedeutet. Außerdem wird vorausgesetzt, daß $m \leqq 8$ ist, weil dann das Geschlecht von $\mathfrak{E}$ nur eine Klasse enthält. Es soll also die Anzahl der Darstellungen von $\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y}$ durch eine Summe von m ($\leqq 8$) Quadraten linearer Formen bestimmt werden, wobei allerdings noch gewisse Voraussetzungen über die Form $\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y}$ gemacht werden.

Für $n = 1$ ist das die teilweise schon von Gauss beantwortete Frage nach der Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl durch eine Summe von m ($\leqq 8$) Quadraten ganzer Zahlen. Es gilt dafür zum Beispiel der von Jacobi gefundene Satz, daß eine ungerade Zahl t sich auf

$$8 \sum_{d|t} d \tag{2}$$

Arten in eine Summe von vier Quadraten ganzer Zahlen zerlegen läßt, wenn d alle Teiler von t durchläuft.

Für $n > 1$ hat man bis jetzt die $A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ noch nicht berechnen können. Allerdings verfügt man bereits über eine Reihe von Existenzsätzen. Mordell stellte die notwendigen und hinreichenden Bedingungen auf, unter denen es ein ganzes $\mathfrak{C}$ gibt, das für den Fall $\mathfrak{S} = \mathfrak{E}$ und $n = 2$ der Gleichung (1) genügt [1]). Insbesondere ergibt sich, daß für $m \geqq 5$

---

[1]) L. J. Mordell, A new Warings problem with squares of linear forms, Quarterly Journal of Mathematics (Oxford Series) **1** (1930), 276—288. L. J. Mordell, On binary quadratic forms as a sum of three linear squares with integer coefficients, Crelle **167** (1931). L. J. Mordell, On the representation of a binary quadratic form as a sum of squares of linear forms, Math. Ztschr. **35** (1932). L. J. Mordell, An application of quaternions to the representation of a binary quadratic form as a sum of four linear squares, Quarterly Journal of Mathematics (Oxford Series) **8** (1937).

in diesem Fall die Gleichung (1) immer in ganzen $\mathfrak{C}$ lösbar ist. Weiterhin gilt der kürzlich bewiesene Satz, daß es für $\mathfrak{S} = \mathfrak{E}$, $n \leqq 5$ und $m \geqq n + 3$ immer ein ganzes $\mathfrak{C}$ gibt, das die Gleichung (1) erfüllt, und daß für $n > 5$ mindestens eine Form $\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y}$ existiert, die überhaupt nicht ganzzahlig in eine Summe von Quadraten linearer Formen zerlegt werden kann [2]).

Die Methoden, mit welchen diese Existenzsätze bewiesen wurden, lassen sich nicht anwenden, wenn man nach den $A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ fragt. Es ist jedoch möglich, auf einem anderen Weg diese Anzahlen zu bestimmen, und zwar mit Hilfe des Siegelschen Satzes über die Anzahlen der Darstellungen quadratischer Formen [3]).

Wendet man nämlich diesen Satz an für positiv definite Formen und für den Fall, daß das Geschlecht von $\mathfrak{S}$ nur eine Klasse enthält, so ergibt sich die Formel:

$$(3)\quad A(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) = kT^{\frac{m-n-1}{2}} S^{-\frac{n}{2}} \frac{\pi^{\frac{n(2m-n+1)}{4}}}{\Gamma\left(\frac{m-n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-n+2}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \prod_p \alpha_p(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$$

mit $k = \frac{1}{2}$ für $m = n + 1$ und $m = n > 1$ und $k = 1$ sonst.

Dabei ist S die Determinante von $\mathfrak{S}$, T diejenige von $\mathfrak{T}$, das Produkt ist erstreckt über alle Primzahlen in natürlicher Reihenfolge, und die p-adischen Lösungsdichten $\alpha_p(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$ sind so erklärt:

Bedeutet $A_q(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$ die Anzahl der mod q verschiedenen Lösungen der Matrizenkongruenz

$$(4)\qquad \mathfrak{C}'\mathfrak{S}\mathfrak{C} \equiv \mathfrak{T} \pmod{q}$$

in ganzen $\mathfrak{C}$ und setzt man $q = p^a$, so ist:

$$(5)\qquad \alpha_p(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) = \begin{cases} \lim\limits_{a\to\infty} q^{\frac{n(n+1)}{2} - mn} A_q(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) & \text{für } m > n \\ \lim\limits_{a\to\infty} \frac{1}{2} q^{-\frac{(n-1)n}{2}} A_q(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) & \text{für } m = n. \end{cases}$$

Siegel hat bewiesen, daß $q^{\frac{n(n+1)}{2} - mn} A_q(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$ von a unabhängig ist für $a > 2b$, wenn p genau in der b-ten Potenz in $2T$ aufgeht.

Im folgenden soll unter Anwendung von (3) der Wert von $A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ für zwei spezielle Fälle bestimmt werden. Weil (3) nur gilt, wenn das Geschlecht von $\mathfrak{S}$ aus einer Klasse besteht, muß man dabei $m \leqq 8$ voraussetzen. Der Verlauf der Rechnung ist in jedem Fall durch (3) festgelegt: zuerst bestimmt man die $A_q(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$, bildet damit die $\alpha_p(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$ und multipliziert dann das auf der rechten Seite von (3) stehende Produkt aus.

Der erste spezielle Fall wird in einem ersten Kapitel behandelt. Es wird gezeigt, daß man die Sätze über die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl durch eine Summe von Quadraten ganzer Zahlen übertragen kann auf die $A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$, wenn man außer $m \leqq 8$ noch voraussetzt, daß die zu $\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y}$ adjungierte Form $T\mathfrak{y}'\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{y}$ primitiv ist, was besagt, daß die Elemente von $T\mathfrak{T}^{-1}$ zueinander teilerfremd sind. Zu diesen Formen mit primitiver Adjungierter gehören zum Beispiel alle diejenigen, deren Determinante quadratfrei ist.

---

[2]) Teilweise von Mordell und teilweise von Chao-Ko bewiesen. — Die Arbeit von Mordell erscheint in den Annals of Mathematics, die von Chao-Ko im Quarterly Journal of Mathematics.

[3]) C. L. Siegel, Über die analytische Theorie der quadratischen Formen, Annals of Mathematics **36** (1935).

Das wichtigste Resultat dieses Kapitels ist der Satz 1, bei welchem noch gewisse Voraussetzungen über das Verhalten von $\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y}$ im Dyadischen gemacht werden. An dieser Stelle soll nicht der ganze Satz formuliert, sondern nur ein Beispiel dazu angegeben werden:

Ist $T\mathfrak{y}'\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{y}$ primitiv, $m \leqq 8$ und $\mathfrak{T}$ äquivalent $\mathfrak{E}$ mod 8, so läßt sich die Jacobische Formel (2) verallgemeinern zu:

$$A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = \frac{m!\, 2^n}{3!} \sum_{d|T} \chi_d \frac{T}{d} \qquad (m - n = 3), \tag{6}$$

wenn d alle Teiler von T durchläuft und χ_d sich in folgender Weise ergibt:

Mit t^* werde in der Folge immer eine durch $T\mathfrak{y}'\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{y}$ dargestellte Zahl bezeichnet, in der p in einer möglichst niedrigen Potenz aufgeht. Im Fall eines primitiven $T\mathfrak{y}'\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{y}$ ist dieses t^* also zu p teilerfremd ($p \neq 2$). Es bedeutet dann χ_p das Legendresche Symbol $\left(\frac{t^*}{p}\right)$. Weil χ_p invariant ist für das ganze Geschlecht, nennt man es einen Geschlechtscharakter. Ist nun in (6) die Zahl $d = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \cdots p_k^{l_k}$, dann ist

$$\chi_d = \chi_{p_1}^{l_1} \chi_{p_2}^{l_2} \cdots \chi_{p^k}^{l_k},$$

und χ_d ist auch ein Geschlechtscharakter.

In einem zweiten Kapitel wird der zweite Spezialfall behandelt. Es wird nicht mehr $T\mathfrak{y}'\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{y}$ als primitiv vorausgesetzt; dagegen wird $n = 2$ angenommen. Das wesentlichste Resultat ist hier der zu Anfang des Kapitels stehende Satz 2, der im dritten Paragraphen zur Berechnung der $A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ für $m \leqq 8$ und ungerades T benutzt wird.

Zum Beispiel sind im Fall $m = 5$ diese $A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ von folgendem Typus:

$$A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = 3 \cdot 2^4 \cdot 5 \cdot T \prod_{p|T} H_p \tag{7}$$

und zwar erstens, wenn $T \equiv 3 \pmod 4$ ist und die Form $\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y}$ nur gerade Zahlen darstellt, zweitens, wenn $T \equiv 1 \pmod 4$ ist und $\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y}$ mod 4 die Zahl 3 darstellt. Sonst ergibt sich bei ungeradem T für $A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ ein Drittel des auf der rechten Seite von (7) stehenden Wertes. Dabei bedeutet H_p den Ausdruck:

$$H_p = \begin{cases} \chi_p^{s-1} \eta_p p^{-(r+s)} \sum\limits_{x=0}^{\frac{r-1}{2}} p^{3x} + p^{\frac{1-r}{2}} \sum\limits_{x=0}^{\frac{r-1}{2}} p^x & \text{für ungerades } r, \\ \chi_p^s p^{-(r+s)} \sum\limits_{x=0}^{\frac{r}{2}-1} p^{3x} + p^{1-\frac{r}{2}} \sum\limits_{x=0}^{\frac{r}{2}-1} p^x + p^{-\frac{r}{2}} \sum\limits_{x=0}^{s-r} \chi_p^x p^{-x} & \text{für gerades } r, \end{cases}$$

wenn p genau in der r-ten Potenz im größten gemeinsamen Teiler der Elemente von $\mathfrak{T}$ aufgeht und $r + s$ der größte Exponent ist, für den p^{r+s} Teiler von T ist. Ferner sind χ_p und η_p so zu erklären:

Bedeutet g irgendeine ganze rationale Zahl $\neq 0$ und p eine ungerade Primzahl, für die $g = g_1 p^l$ mit $(g_1, p) = 1$ besteht, so soll unter dem Symbol $\left(\frac{g}{p}\right)$ das Legendresche Symbol $\left(\frac{g_1}{p}\right)$ verstanden werden. Hat dann t^* die bei der Erklärung von (6) eingeführte Bedeutung, so ist

$$\chi_p = \left(\frac{t^*}{p}\right) \text{ und } \eta_p = \left(\frac{(-1)^s T}{p}\right),$$

und χ_p ist wieder ein Geschlechtscharakter.

Ist $r = 0$ und setzt man $\mathfrak{T}$ äquivalent $\mathfrak{E}$ mod 8 voraus, so wird aus (7) die Formel (6), angewandt auf $n = 2$.

Genaue Angaben über die zu beweisenden Sätze findet man jeweils am Anfang eines Kapitels.

Kapitel 1.

Die Anzahl der Darstellungen einer quadratischen Form, deren Adjungierte primitiv und deren Variablenanzahl $\leqq 8$ ist, durch eine Summe von höchstens 8 Quadraten linearer Formen.

Nachdem Gauss gefunden hatte, wie groß die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl durch eine Summe von zwei oder drei Quadraten ganzer Zahlen ist, fand Jacobi die entsprechende Formel für 4, 6 und 8 Quadrate und Eisenstein für 5 und 7 Quadrate. Sie bestimmten also bei gegebenen t und $m(\leqq 8)$ die Anzahl $A(\mathfrak{E}, t)$ der ganzen Spalten $\mathfrak{c}$, für die $\mathfrak{c}'\mathfrak{c} = t$ ist. Setzt man weiter voraus, daß $t \equiv 1 \pmod 8$, bei ungeradem m die Zahl t ein Quadrat und allgemein $[x]$ die größte ganze Zahl $\leqq x$ ist, so kann man diese Formeln einheitlich so schreiben:

$$A(\mathfrak{E}, t) = 2m\, t^{\frac{m-2}{2}} \prod_{p^r \| t} \left(\sum_{l=0}^{r} p^{\left[-\frac{m-2}{2} l\right]} \zeta_p^l \right). \tag{8}$$

Dabei besagt $p^r \| t$, daß $t = t' p^r$ ist, mit zu p teilerfremdem t'. Das Produkt ist erstreckt über alle Primteiler von t, und ζ_p ist, wie im folgenden stets, für ungerades p erklärt durch:

$$\zeta_p = \begin{cases} \left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{h}{2}} \chi_p\left(\frac{S}{p}\right) & (h = m - n + 1 \text{ gerade}) \\ \varepsilon_p & (h \text{ ungerade}) \end{cases} \tag{9}$$

mit $\varepsilon_p = -\left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{h-1}{2}} \left(\frac{TS}{p}\right)$, wenn die Symbole in der gleichen Weise aufgefaßt werden wie in der Einleitung. Weil in (8) die Determinante $S = 1$, der Geschlechtscharakter $\chi_p = 1$ und $n = 1$ ist, hat also ζ_p den Wert $\left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{m}{2}}$ bei geradem m und den Wert $-\left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{t}{p}\right)$ bei ungeradem m.

Ist bei ungeradem m die Zahl t kein Quadrat, so muß man die rechte Seite von (8) noch multiplizieren mit

$$\prod_{p>2} \frac{1 - \zeta_p p^{\frac{1-h}{2}}}{1 - \xi_p p^{\frac{1-h}{2}}},$$

wobei $\xi_p = -\left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{h-1}{2}}$ ist und das Produkt über alle ungeraden Primzahlen erstreckt wird.

Für gerades m kann man einfacher an Stelle des Produktes eine Summe schreiben und außerdem noch mit $t^{\frac{m-2}{2}}$ in die Summe hineinmultiplizieren, wie es in (2) gemacht wurde. Beim Einsetzen von Zahlen ist es jedoch bequemer, (8) nicht erst in dieser Weise umzuformen.

In diesem Kapitel wird hauptsächlich bewiesen, daß die Formel (8) verallgemeinert werden kann zu

Satz 1. *Ist* $\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y} \bmod 8$ *der Einheitsform äquivalent,* $T\mathfrak{y}'\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{y}$ *primitiv und bei ungeradem* $m - n + 1 = h$ *die Zahl* T *ein Quadrat, so gilt*

$$A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = \frac{m!\, 2^n}{(m-n)!}\, T^{\frac{h-2}{2}} \prod_{p^r \| T} \left(\sum_{l=0}^{r} p^{\left[-\frac{h-2}{2} l\right]} \zeta_p^l \right) \qquad (m \leqq 8). \tag{10}$$

Das Produkt ist erstreckt über alle Teiler von T, und wegen der Definition (9) und der Voraussetzung $\mathfrak{S} = \mathfrak{E}$ ist in (10)

$$\zeta_p = \begin{cases} \chi_p\left(\dfrac{-1}{p}\right)^{\frac{h}{2}} & (h \text{ gerade}) \\ -\left(\dfrac{-1}{p}\right)^{\frac{h-1}{2}} \left(\dfrac{T}{p}\right) & (h \text{ ungerade}). \end{cases}$$

Dieses ζ_p ist also eine Verallgemeinerung des in der Formel (8) stehenden ζ_p.

Ferner wird im folgenden auch bei geradem $m - n$ die Anzahl der Darstellungen für nicht quadratische T bestimmt. Sie ergibt sich aus (10) genau so wie bei $n = 1$ aus der Formel (8).

Die Voraussetzung $\mathfrak{T}$ äquivalent $\mathfrak{E} \bmod 8$ ist notwendig, wenn man für alle h und alle $\mathfrak{T}$ die Formel (10) einheitlich schreiben will. Die $A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ sollen jedoch für alle $\mathfrak{T}$, deren Determinante $T \equiv 1 \pmod 4$ ist, ausgerechnet werden.

Der Beweis des Satzes 1 wird so geführt: In einem ersten Paragraphen werden unter der Bedingung $(S, p) = 1$ die Anzahlen $A_q(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$ mit $q = p^a$ bestimmt, wo p eine ungerade Primzahl bedeutet. Die Berechnung dieser Anzahlen wird mit Hilfe einer Rekursionsformel zurückgeführt auf die Berechnung einfacher Gaußscher Summen. Dabei wird nicht vorausgesetzt, daß $m \leqq 8$ ist. Diese Voraussetzung spielt erst im zweiten Paragraphen eine Rolle, in dem dieselben Überlegungen durchgeführt werden für die gerade Primzahl 2, die im Unterschied zu den ungeraden Primzahlen im allgemeinen nicht mit dem Buchstaben p bezeichnet werden soll. Macht man hier nicht die Voraussetzung $m \leqq 8$, so gelingt die Reduktion auf die Berechnung einfacher Gaußscher Summen nicht in der gleichen Weise wie für ungerades p. Um nicht noch mehr Fälle unterscheiden zu müssen, wird noch weiter angenommen, daß $T \equiv 1 \pmod 4$ ist. Im dritten Paragraphen wird dann die Formel (3) angewandt, um die Lösungsanzahlen im p-adischen und Dyadischen mit der Anzahl der ganzen rationalen Darstellungen zu verknüpfen. Der letzte Paragraph enthält ein einfaches Zahlenbeispiel und ein paar spezielle Sätze.

§ 1. Die p-adischen Lösungsdichten.

In diesem Paragraphen sei p immer eine ungerade Primzahl und $q = p^a$. Gefragt wird nach den $A_q(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$, also der Anzahl der mod q verschiedenen Lösungen der Matrizenkongruenz (4), und zwar für $a > 2r$, falls $p^r \| 2T$ ist. Dabei sei S zu p teilerfremd und die Form $T\mathfrak{y}'\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{y}$ primitiv. Man kann von vornherein $\mathfrak{S}$ als Diagonalmatrix annehmen, weil es immer eine zu $\mathfrak{S}$ mod q äquivalente Diagonalmatrix gibt. Ebenso kann man $\mathfrak{T}$ durch eine zu $\mathfrak{T}$ mod q äquivalente Diagonalmatrix $\mathfrak{D}$ ersetzen. Wegen der Primitivität von $T\mathfrak{y}'\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{y}$ kann man die $n - 1$ ersten Diagonalelemente $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ von $\mathfrak{D}$ als zu p teilerfremd annehmen; das letzte Diagonalelement sei $t_n p^r$ mit $(t_n, p) = 1$.

Um die Ausrechnung der $A_q(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$ einfacher durchführen zu können, beweist man zuerst, daß sie sich wegen der einschränkenden Voraussetzung über $\mathfrak{T}$ multiplikativ

zusammensetzen aus den Lösungsanzahlen einfacher quadratischer Kongruenzen. Das liegt im wesentlichen daran, daß für $q = p^a$ mit beliebigem $a \geqq 1$ die jetzt herzuleitende Rekursionsformel besteht:

$$A_q(\mathfrak{S}, \mathfrak{D}) = \sum_{\mathfrak{a}} A_q(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{D}_1), \tag{11}$$

wobei die Spalte $\mathfrak{a}$ die Lösungen von

$$\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} \equiv t_1 \pmod q \tag{12}$$

durchläuft, $\mathfrak{S}_1$ eine durch $\mathfrak{a}$ bestimmte Matrix ist, $\mathfrak{D}_1$ die Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $t_2, t_3, \ldots, t_{n-1}, t_n p^r$ bedeutet und für $n = 1$ das allgemeine Glied der Summe durch 1 zu ersetzen ist.

Beweis. Man denke sich bei gegebenem $\mathfrak{S}$, dessen Determinante S zu p teilerfremd ist, die Kongruenz (12) gelöst. Eine solche Lösung sei $\mathfrak{a}$. Sie ist mod q primitiv, also kann man sie zu einer mod q unimodularen Matrix $\mathfrak{U}_1$ ergänzen. Überdies kann man $\mathfrak{U}_1$ so wählen, daß

$$\mathfrak{U}_1'\mathfrak{S}\mathfrak{U}_1 \equiv \begin{pmatrix} t_1 & \mathfrak{n}' \\ \mathfrak{n} & \mathfrak{S}_1 \end{pmatrix} \pmod q \tag{13}$$

ist, wo $\mathfrak{n}$ eine Spalte bedeutet, die lauter Nullen enthält. Gibt es nun eine Lösung $\mathfrak{C}$ der Kongruenz $\mathfrak{X}'\mathfrak{S}\mathfrak{X} \equiv \mathfrak{D} \pmod q$, die $\mathfrak{a}$ zur ersten Spalte hat, so erkennt man die Gültigkeit von

$$\mathfrak{C} \equiv \mathfrak{U}_1 \begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{b}' \\ \mathfrak{n} & \mathfrak{C}_1 \end{pmatrix} \pmod q$$

mit ganzen $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{b}'$. Nun ist aber $\mathfrak{C}'\mathfrak{S}\mathfrak{C}$ der Diagonalmatrix $\mathfrak{D}$ kongruent, also folgt $t_1\mathfrak{b} \equiv \mathfrak{n} \pmod q$ und daraus $\mathfrak{b} \equiv \mathfrak{n} \pmod q$ und $\mathfrak{C} \equiv \mathfrak{U}_1 \begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{n}' \\ \mathfrak{n} & \mathfrak{C}_1 \end{pmatrix} \pmod q$. Dann ist $\mathfrak{C}_1'\mathfrak{S}_1\mathfrak{C}_1$ der Diagonalmatrix $\mathfrak{D}_1$ kongruent. Also bekommt man alle $A_q(\mathfrak{S}, \mathfrak{D})$ genau einmal, indem man zuerst alle mod q verschiedenen Lösungen $\mathfrak{x} \equiv \mathfrak{a} \pmod q$ von (12) bestimmt, für jedes solche $\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{U}_1$ aufsucht und für das dazugehörige $\mathfrak{S}_1$ sämtliche mod q verschiedenen Lösungen von $\mathfrak{X}'\mathfrak{S}_1\mathfrak{X} \equiv \mathfrak{D}_1 \pmod q$ bestimmt. Das liefert gerade die Rekursionsformel (11). Beim Beweis wurde wesentlich benutzt, daß t_1 zu p teilerfremd ist.

Mit dieser Methode hat Siegel für den Fall $(S, p) = 1$ und $(T, p) = 1$ die $A_q(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$ berechnet. Definiert man für gerades m das Symbol $\delta = \left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{S}{p}\right)$ und setzt man bei ungeradem $h = m - n + 1$ für ε_p denselben Wert ein wie in der Definitionsgleichung (9), so kommt man in diesem Fall zu den Formeln

$$q^{\frac{n(n+1)}{2} - mn} A_q(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) = \begin{cases} (1 - \delta_p p^{-\frac{m}{2}})(1 - \varepsilon_p p^{\frac{n-m}{2}}) \prod_{\varkappa=1}^{\frac{n}{2}-1} (1 - p^{2\varkappa - m}) & (m \text{ gerade}, n \text{ gerade}) \\ (1 - \delta_p p^{-\frac{m}{2}}) \prod_{\varkappa=1}^{\frac{n-1}{2}} (1 - p^{2\varkappa - m}) & (m \text{ gerade}, n \text{ ungerade}) \\ (1 - \varepsilon_p p^{\frac{n-m}{2}}) \prod_{\varkappa=1}^{\frac{n-1}{2}} (1 - p^{2\varkappa - m - 1}) & (m \text{ ungerade}, n \text{ ungerade}) \\ \prod_{\varkappa=1}^{\frac{n}{2}} (1 - p^{2\varkappa - m - 1}) & (m \text{ ungerade}, n \text{ gerade}). \end{cases} \tag{14}$$

Nun wird behauptet:

Ist $T\mathfrak{y}'\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{y}$ *primitiv,* S *zu* p *teilerfremd und* $q = p^a$ *mit* $a \geqq r+1$, *so erhält man* $q^{\frac{n(n+1)}{2}-mn} A_q(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$ *aus den Formeln* (14), *indem man die rechte Seite mit dem nur von* r, ζ_p *und* h *abhängigen Faktor*

$$H_p = \sum_{l=0}^{r} p^{\left[-\frac{h-2}{2}l\right]} \zeta_p^l \tag{15}$$

multipliziert, wo ζ_p *durch die Definitionsgleichung* (9) *gegeben ist.*

Diese Behauptung wird mit Hilfe Gaußscher Summen und einer doppelten Induktion nach r und n bewiesen. Zunächst ist jedoch für $n = 1$ eine Zwischenbetrachtung über die Größe von a erforderlich.

Setzt man zur Abkürzung $e^{\frac{2\pi i}{p^a}x} = \omega_a\{x\}$ und $t_1 p^r = t$, so wird

$$p^a A_{p^a}(\mathfrak{S}, t) = \sum_{\mathfrak{c},\, \varrho (\mathrm{mod}\, p^a)} \omega_a\{\varrho(\mathfrak{c}'\mathfrak{S}\mathfrak{c} - t)\}. \tag{16}$$

Dabei bedeutet $\mathfrak{c}$ eine Spalte mit m Elementen, die unabhängig voneinander ein vollständiges Restsystem mod p^a durchlaufen; ebenso durchläuft die Zahl ϱ ein vollständiges Restsystem mod p^a. Die rechte Seite von (16) kann man auf folgende Art in zwei Summen zerspalten:

$$p^a A_{p^a}(\mathfrak{S}, t) = \sum_{\substack{\mathfrak{c}(\mathrm{mod}\, p^a) \\ \varrho[\mathrm{mod}\, p^a]}} \omega_a\{\varrho(\mathfrak{c}'\mathfrak{S}\mathfrak{c} - t)\} + p^{m+a-1} A_{p^{a-1}}(\mathfrak{S}, t), \tag{17}$$

wobei $\varrho[\mathrm{mod}\, p^a]$ im Unterschied zu $\varrho\,(\mathrm{mod}\, p^a)$ besagt, daß ϱ ein reduziertes Restsystem mod p^a durchläuft. Nun ist für $(\varrho, p) = 1$ die Summe

$$\sum_{\mathfrak{c}(\mathrm{mod}\, p^a)} \omega_a\{\varrho\,\mathfrak{c}'\mathfrak{S}\,\mathfrak{c}\} = \begin{cases} p^{\frac{a}{2}m} & (a \text{ gerade}) \\ p^{\frac{a-1}{2}m}\left(\dfrac{S\varrho^m}{p}\right) G^m & (a \text{ ungerade}), \end{cases} \tag{18}$$

wobei G die gewöhnliche Gaußsche Summe

$$\sum_{c(\mathrm{mod}\, p)} \omega_1\{c^2\}$$

bedeutet. Nun ist aber $\sum_{\varrho[\mathrm{mod}\, p^a]} \omega_a\{-\varrho t\} = 0$ und $\sum_{\varrho[\mathrm{mod}\, p^a]} \left(\frac{\varrho}{p}\right) \omega_a\{-\varrho t\} = 0$ für $a > r+1$. Also bleibt zufolge (17) für zu p teilerfremdes $\mathfrak{S}$ der Wert von $q^{1-m} A_q(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$ konstant, wenn $a \geqq r+1$ ist.

Jetzt beweist man die Behauptung im Falle $n = 1$: Sie folgt leicht für $r = 0$, denn dann wird $H_p = 1$ und $q^{1-m} A_q(\mathfrak{S}, t)$ hat den aus (14) zu entnehmenden Wert. Man denke sich jetzt ein beliebiges ungerades r vorgegeben. Zu diesem r gibt es ein l, sodaß $r = 2l-3$ und $l \geqq 2$ ist. Weil die Werte der zu berechnenden Summen davon abhängen, ob r gerade oder ungerade ist, hat man noch zu zeigen, daß aus der Richtigkeit der Behauptung für $r = 2l-3$ die Richtigkeit für $r = 2l-2$ und aus der Richtigkeit für $r = 2l-2$ oder 0 diejenige für $r = 2l-1$ oder 1 folgt. Das macht man mit Hilfe der Zwischenbetrachtung, indem man in (16) die Zahl $a = 2l$ setzt. Dann bleibt der Wert von $p^{g(1-m)} A_{p^g}(\mathfrak{S}, t)$ derselbe für $g \geqq 2l$ und für jedes $r \leqq 2l-1$. Will man jetzt in (16) die Summation über die Spalte $\mathfrak{c}$ ausführen, so muß man die rechte Seite in Teilsummen zerspalten, und zwar abhängig davon, in welcher Potenz p in ϱ aufgeht. Ist $(\varrho, p^{2l}) = p^j$,

so setzt man $\varrho \equiv up^j \pmod{p^{2l}}$ mit $(u, p) = 1$. Dann hat man einerseits u ein reduziertes Restsystem mod p^{2l-j} durchlaufen zu lassen und andererseits für j die Werte $0, 1, 2, \ldots, 2l$ einzutragen. Führt man die Summation über $\mathfrak{c}$ mittels (18) aus, so wird (16) zu:

$$(19)\quad p^{2l} A_{p^{2l}}(\mathfrak{S}, t) = p^{ml}\left\{ \sum_{\substack{\varkappa=0 \\ u[\bmod p^{2(l-\varkappa)}]}}^{l} p^{\varkappa m}\, \omega_{2(l-\varkappa)}\{-ut\} + G^m\left(\frac{S}{p}\right) \sum_{\substack{\varkappa=0 \\ u[\bmod p^{2(l-\varkappa)-1}]}}^{l-1} p^{\varkappa m}\left(\frac{u}{p}\right)^m \omega_{2(l-\varkappa)-1}\{-ut\}\right\}.$$

Für die drei Werte $r = 2l-3$, $r = 2l-2$, $r = 2l-1$ unterscheiden sich in (19) nur drei der Teilsummen voneinander; nämlich die beiden mit $\varkappa = 0$ und diejenige mit $\varkappa = 1$, in der u das reduzierte Restsystem mod $p^{2(l-1)}$ durchläuft. Die anderen Teilsummen haben für die drei verschiedenen r den gleichen Wert, weil dann $p^{2(l-\varkappa)}$ und $p^{2(l-\varkappa)-1}$ Teiler von p^r sind.

Die Ausrechnung ergibt deshalb: Um $p^{2l(1-m)} A_{p^{2l}}(\mathfrak{S}, t)$ für $r = 2l-2$ aus $p^{2l(1-m)} A_{p^{2l}}(\mathfrak{S}, t)$ für $r = 2l-3$ zu erhalten, hat man zu dem sich für $r = 2l-3$ ergebenden Resultat noch hinzuzufügen:

$$p^{(1-l)m+2l-2}\left(1 - \delta_p p^{-\frac{m}{2}}\right) \qquad \text{für gerades } m,$$
$$p^{(1-l)m+2l-2}\left(1 - \varepsilon_p p^{\frac{1-m}{2}}\right) \quad \text{für ungerades } m.$$

Weil $n = 1$ ist, bedeutet dabei δ_p für gerades m das Symbol $\left(\frac{(-1)^{\frac{m}{2}} S}{p}\right)$, und ε_p hat für ungerades m den Wert $-\left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{St}{p}\right)$. Ebenso erhält man aus $p^{2l(1-m)} A_{p^{2l}}(\mathfrak{S}, t)$, bestimmt für $r = 2l-2$, denselben Ausdruck, bestimmt für $r = 2l-1$, indem man dazu noch addiert:

$$p^{-lm+2l-1+\frac{m}{2}} \delta_p\left(1 - \delta_p p^{-\frac{m}{2}}\right) \qquad \text{für gerades } m,$$
$$p^{-lm+2l-2+\frac{m+1}{2}} \varepsilon_p\left(1 - \varepsilon_p p^{\frac{1-m}{2}}\right) \quad \text{für ungerades } m.$$

Die jeweils in den Klammern stehenden Ausdrücke ergeben die rechten Seiten von (14), angewandt auf $n = 1$. Die vor den Klammern stehenden Faktoren sind jedoch die letzten Summanden in (15), falls man diese Formel auf $r = 2l-2$, $r = 2l-1$ und $n = 1$ anwendet. Also ist hiermit die Behauptung für den Fall $n = 1$ bewiesen.

Man nehme jetzt an, es sei $n > 1$, und die Behauptung sei richtig für $n-1$ statt n. Wendet man (14) und (15) an, so ergibt sich, daß $A_q(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{D}_1)$ nicht von den einzelnen Elementen von $\mathfrak{S}_1$, sondern nur von der Determinante S_1 von $\mathfrak{S}_1$ abhängt, die wegen der Kongruenz (13) für alle $\mathfrak{a}$ aus (11) mod q den gleichen Wert hat. Also folgt aus der Rekursionsformel (11):

$$(20)\qquad A_q(\mathfrak{S}, \mathfrak{D}) = A_q(\mathfrak{S}, t_1)\, A_q(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{D}_1).$$

Nun ist wegen (14)

$$q^{1-m} A_q(\mathfrak{S}, t_1) = \begin{cases} 1 - \delta_p p^{-\frac{m}{2}} & (m \text{ gerade}) \\ 1 - \gamma_p p^{\frac{1-m}{2}} & (m \text{ ungerade}) \end{cases}$$

mit $\gamma_p = -\left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{St_1}{p}\right)$ für ungerades m.

Man wendet jetzt (14) und (15) an mit $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{D}_1$ statt $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{D}$. Multipliziert man dann $q^{1-m} A_q(\mathfrak{S}, t_1)$ mit dem durch (14) gelieferten Faktor von $q^{\frac{(n-1)n}{2}-(m-1)(n-1)} A_q(\mathfrak{S}, t_1)$, so erhält man gerade die rechte Seite von (14), angewandt für $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{D}$. Daß der aus (15) sich ergebende zweite Faktor unverändert bleibt, wenn man $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{D}_1$ durch $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{D}$ ersetzt, sieht man so ein:

S_1 war die Determinante von $\mathfrak{S}_1$, es sei T_1 diejenige von $\mathfrak{D}_1$. Aus (13) folgt $S_1 \equiv St_1^{-1} \pmod q$ und aus der Definition von $\mathfrak{D}_1$ folgt $T_1 \equiv Tt_1^{-1} \pmod q$. Man beachte jetzt, wie χ_p in der Einleitung definiert war. Es ist demzufolge sicher zulässig, $t^* \equiv t_1 t_2 \cdots t_{n-1} \pmod q$ zu wählen. Hat nun t_1^* für $\mathfrak{D}_1$ dieselbe Bedeutung wie t^* für $\mathfrak{D}$, so kann man ebenso $t_1^* \equiv t_2 t_3 \cdots t_{n-1} \pmod q$ wählen, und es ist

$$\left(\frac{TS}{p}\right) = \left(\frac{T_1 S_1}{p}\right), \qquad \left(\frac{S_1 t_1^*}{p}\right) = \left(\frac{St^*}{p}\right);$$

das heißt aber gerade, daß sich die rechte Seite von (15) nicht ändert, wenn man $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{D}$ an Stelle von $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{D}_1$ einträgt.

Die rechten Seiten von (14) und (15) sind für $a \geqq r+1$ von a unabhängig. Im Falle eines zu p teilerfremden S und eines primitiven $T\mathfrak{y}'\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{y}$ ergibt sich also aus der Definitionsgleichung (5):

$$\alpha_p(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) = \lambda q^{\frac{n(n+1)}{2}-mn} A_q(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) \text{ mit } \lambda = \begin{cases} \frac{1}{2} & (m = n) \\ 1 & (\text{sonst}), \end{cases}$$

wobei man für $q^{\frac{n(n+1)}{2}-nm} A_q(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$ die rechte Seite von (14), multipliziert mit dem entsprechenden H_p aus (15), einzusetzen hat.

§ 2. Die dyadischen Lösungsdichten.

Die dyadischen Lösungsdichten sind definiert durch (5) mit $q = 2^a$. Ihre Berechnung muß gesondert durchgeführt werden, weil sich die $A_q(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$ hier anders verhalten als für $q = p^a$ mit ungeradem p.

Die Zahl T sei ungerade. Dann folgt aus dem in der Einleitung angegebenen Satz über die Größe von a, daß die Dichten $\alpha_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ bekannt sind, wenn man die $A_q(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ mit $q = 8$ kennt; es werde deshalb von jetzt ab $q = 8$ angenommen. Aus der Transformationstheorie symmetrischer Matrizen folgt, daß man für ungerades T im Dyadischen zwei verschiedene Typen von Matrizen $\mathfrak{T}$ unterscheiden muß, die geraden und die ungeraden. Man nennt $\mathfrak{T}$ gerade, wenn $\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y}$ nur gerade Zahlen darstellen kann, sonst nennt man es ungerade. Man kann zeigen, daß $\mathfrak{T}$ bei ungeradem T nur für gerades n gerade sein kann. Für $n = 2$ werden im zweiten Kapitel die $\alpha_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ auch für gerade $\mathfrak{T}$ berechnet; jetzt soll jedoch vorausgesetzt werden, daß $\mathfrak{T}$ ungerade ist, weil es dann eine zu $\mathfrak{T}$ mod 8 äquivalente Diagonalmatrix gibt.

Man beweist leicht, daß jede ungerade Form $\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y}$ mit ungeradem T und mehr als drei Variablen mod 8 die Zahl 1 darstellt. Also ist $\mathfrak{T}$ für $n > 3$ einer Diagonalmatrix äquivalent, in deren Diagonale die $n-3$ ersten Elemente $\equiv 1 \pmod 8$ sind; die drei restlichen seien t_1, t_2 und t_3.

Für ungerades $q = p^a$ mit $a \geqq 1$ wurde die Rekursionsformel (11) bewiesen. Man beweist ebenso für $q = 8$ die folgende Rekursionsformel:

$$A_q(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = \sum_{\mathfrak{a}} A_q(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{D}_1) \qquad (n > 1), \tag{21}$$

wenn $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{D}_1$ dieselbe Bedeutung haben wie in (11). Dabei ist allerdings wesentlich, daß man von vornherein $\mathfrak{S} = \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{T}$ ungerade annahm, denn es wurde beim Beweis

von (11) benutzt, daß $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ auf Diagonalform transformiert werden können, was man hier voraussetzen muß, weil man gerades $\mathfrak{S}$ und gerades $\mathfrak{T}$ nicht auf Diagonalform transformieren kann. Wie man aus (13) ersieht, ist $\mathfrak{S}_1$ von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{a}$ abhängig, wobei $\mathfrak{a}$ für $n > 3$ eine Lösung von $\mathfrak{x}\mathfrak{x}' \equiv 1 \pmod 8$ ist, wenn m die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{x}$ ist. Nun hat Minkowski bewiesen, daß man $\mathfrak{a}$ immer, wenn es nicht nur ungerade Elemente enthält, so zu einer mod 8 unimodularen Matrix $\mathfrak{U}_1$ ergänzen kann, daß $\mathfrak{U}_1'\mathfrak{E}\mathfrak{U}_1 \equiv \mathfrak{E} \pmod 8$ ist. Wird deshalb $1 < m \leqq 8$ vorausgesetzt, so kann wegen $\mathfrak{a}'\mathfrak{a} \equiv 1 \pmod 8$ keine Lösung $\mathfrak{a}$ nur ungerade Elemente enthalten, und man darf für jedes $\mathfrak{a}$ annehmen, daß $\mathfrak{S}_1 \equiv \mathfrak{E}_{m-1} \pmod 8$ ist, wo $\mathfrak{E}_{m-1}$ die Einheitsmatrix mit $m-1$ Elementen bedeutet; allgemein sei $\mathfrak{E}_l$ diejenige mit l Elementen $(0 < l)$.

Daher geht (21) über in

$$A_q(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = A_q(\mathfrak{E}, 1)\, A_q(\mathfrak{E}_{m-1}, \mathfrak{D}_1) \qquad (n > 3;\ m \leqq 8). \tag{22}$$

Dabei muß $n > 3$ nur vorausgesetzt werden, weil bei beliebigem ungeraden $\mathfrak{T}$ mit ungeradem T die Diagonalelemente t_1, t_2 und t_3 irgendwelche ungeraden Reste mod 8 haben können. Ist $n \leqq 3$, so kann man (22) immer dann anwenden, wenn $\mathfrak{T}$ einer Diagonalmatrix äquivalent ist, die ein Diagonalelement enthält, das $\equiv 1 \pmod 8$ ist.

Für $n > 4$ kann man die Formel (22) wiederholt anwenden, bis man zu einem Produkt von Lösungsanzahlen einfacher Kongruenzen mit $A_q(\mathfrak{E}_3, \mathfrak{D})$ kommt, wobei $\mathfrak{D}$ die Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen t_1, t_2 und $t_3 \pmod 8$ bedeutet. Man braucht nun nicht die $A_q(\mathfrak{E}_3, \mathfrak{D})$ für alle möglichen $\mathfrak{D}$ zu berechnen, sondern kann sich erst überlegen, welche $\mathfrak{D}$ zur selben Klasse mod 8 gehören. Es ergibt sich, daß man acht Klassen zu unterscheiden hat. Für vier davon ist $T \equiv 3 \pmod 4$, und für zwei dieser Klassen kann man die Lösungsanzahlen aus dem zweiten Paragraphen des zweiten Kapitels entnehmen, indem man noch die Formel (22) benutzt. Für die anderen vier Klassen, für die also $T \equiv 1 \pmod 4$ ist, kann man als Repräsentantensystem diejenigen $\mathfrak{D}$ nehmen, deren Diagonalelemente mod 8

$$\equiv 1, 1, 1 \quad \text{oder} \equiv 1, 1, 5 \quad \text{oder} \equiv 1, 3, 3 \quad \text{oder} \equiv 1, 3, 7$$

sind. In allen diesen Fällen kann man das Rekursionsverfahren aus (22) noch einen Schritt weiter durchführen, weil das erste Diagonalelement immer $\equiv 1 \pmod 8$ ist.

Es wird sich herausstellen, daß es bei einem vorgelegten ungeraden $\mathfrak{T}$, dessen Determinante $T \equiv 1 \pmod 4$ ist, nur in den Fällen $m - n = 2, 6$ nicht darauf ankommt, welcher der vier Klassen $\mathfrak{T}$ angehört, daß es dagegen für $m - n = 4$ auch vier verschiedene Werte $\alpha_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ für die verschiedenen Klassen geben wird. Bei ungeradem $m - n$ hat man immer zwei Werte von $\alpha_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ zu unterscheiden, die jedoch nicht mit dem Wert von T mod 8 zusammenhängen.

Zuerst betrachte man die Repräsentanten der beiden ersten Klassen. Hier gelangt man mittels (22) bis zu einer Aufspaltung von $A_q(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ in Lösungsanzahlen einfacher quadratischer Kongruenzen. Es sei l die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{x}$, dann bezeichne man die Anzahl der mod 8 verschiedenen Lösungen von $\mathfrak{x}'\mathfrak{x} \equiv t \pmod 8$ mit $A_t^{(l)}$, und es sei $0 < l \leqq 8$. Man findet durch einfaches Abzählen:

$$\begin{gathered} A_1^{(l)} = A_5^{(l)}, \text{ außer wenn } l = 1 \text{ und } l = 5 \text{ ist;} \\ A_1^{(1)} = 2^2, \quad A_5^{(1)} = 0; \qquad A_1^{(5)} = 2^9 \cdot 5, \quad A_5^{(5)} = 2^9 \cdot 7; \\ A_1^{(2)} = 2^4, \quad A_1^{(3)} = 2^5 \cdot 3, \quad A_1^{(4)} = 2^9, \quad A_1^{(6)} = 2^{13} \cdot 3, \quad A_1^{(7)} = 2^{15} \cdot 7, \quad A_1^{(8)} = 2^{21}. \end{gathered} \tag{23}$$

Jetzt betrachte man die Repräsentanten der beiden anderen Klassen. Man wendet erst die Formel (22) an und hat dann noch die entsprechenden $A_t^{(l)}$ aus (23) mit $A_q(\mathfrak{E}_2, \mathfrak{D}^{(j)})$

zu multiplizieren, wo $n > 2$, $j = 1$ oder $= 2$ und

$$\mathfrak{D}^{(1)} \equiv \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \pmod 8, \qquad \mathfrak{D}^{(2)} \equiv \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \pmod 8$$

ist. Für den Fall $n = 2$ hat man nur $A_q(\mathfrak{E}, \mathfrak{D}^{(j)})$ zu berechnen. Diese $A_q(\mathfrak{E}, \mathfrak{D}^{(j)})$ werden im zweiten Kapitel bestimmt und sind aus der Tabelle (54) zu entnehmen. Beachtet man noch, daß man für das dortige m die Zahl $h + 1$ einzusetzen hat, und schreibt man zur Abkürzung $A_q(\mathfrak{E}, \mathfrak{D}^{(j)}) = A(\mathfrak{D}^{(j)})$, so wird

$$\text{(24)} \qquad \begin{aligned} &A(\mathfrak{D}^{(1)}) = A(\mathfrak{D}^{(2)}) = A(\mathfrak{D}) \text{ außer für } h = 5, \\ &A(\mathfrak{D}^{(1)}) = 2^{22} \cdot 55, \quad A(\mathfrak{D}^{(2)}) = 2^{22} \cdot 45 \text{ für } h = 5, \\ &A(\mathfrak{D}) = \begin{cases} 0 \quad (h = 1, 2), & 2^{18} \cdot 15 \ (h = 4), \\ 2^{14} \cdot 3 \ (h = 3), & 2^{28} \cdot 35 \ (h = 6), \quad 2^{36} \cdot 7 \ (h = 7{,}8). \end{cases} \end{aligned}$$

Für jedes ungerade $\mathfrak{T}$, für das $T \equiv 1 \pmod 4$ ist, bekommt man also $\alpha_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ aus der Definitionsgleichung (5), indem man zuerst gemäß (22) die $A_q(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ aus den in (23) und (24) stehenden Werten zusammensetzt und dann beachtet, daß $q^{\frac{n(n+1)}{2} - mn} A_q(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ für $q = 2^a$ und $a \geqq 3$ von a unabhängig ist.

§ 3. Die Anzahl der ganzen rationalen Darstellungen.

Um die Anzahl der ganzen rationalen Darstellungen eines vorgegebenen ungeraden $\mathfrak{T}$, für das $T\mathfrak{y}'\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{y}$ primitiv und $T \equiv 1 \pmod 4$ ist, durch die Einheitsmatrix mit $m(\leqq 8)$ Zeilen zu erhalten, hat man gemäß der Formel (3) das Produkt über die $\alpha_p(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ zu bilden, wenn p alle Primzahlen in natürlicher Reihenfolge durchläuft. Dieses Produkt muß man dann noch mit dem entsprechenden Faktor aus (3) multiplizieren. Für ungerades p sind die $\alpha_p(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ aus den Formeln (14) und (15) zu entnehmen, die $\alpha_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ ergeben sich aus den Formeln (22), (23) und (24). Der Übersicht halber werde in diesem Paragraphen noch $\mathfrak{T}$ äquivalent $\mathfrak{E}$ mod 8 vorausgesetzt. Gehört irgendein $\mathfrak{T}$ mod 8 zu den anderen drei Klassen, für die die Lösungsanzahlen sich aus (22), (23) und (24) ergeben, so hat man die in diesen beiden Paragraphen berechneten $A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ noch zu multiplizieren mit

$$\frac{\alpha_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})}{\alpha_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_n)},$$

wenn $\mathfrak{E}_l$ wie im vorigen Paragraphen die Einheitsmatrix mit l Zeilen bedeutet. Aus (23) und (24) ersieht man, daß ungefähr für die Hälfte der Fälle $\alpha_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = \alpha_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_n)$ ist. Man setze zur Abkürzung $\alpha_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_n) = \alpha_2$.

Das unendliche Produkt $\prod_p \alpha_p(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ läßt sich in unserem Fall für gerades h zerspalten in Produkte der folgenden Art

$$\prod_{p>2} (1 - p^{-k}) \text{ und } \prod_{p>2} \left(1 - \left(\frac{-1}{p}\right) p^{-k}\right) \qquad (k \geqq 1).$$

Ist jedoch h ungerade und > 1, so treten im Resultat gewisse L-Reihen auf. Setzt man deren Werte ein (was jedoch jetzt nicht ausgeführt werden soll), so ergibt sich auch in diesen Fällen für $A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ ein finiter Ausdruck.

Der Beweis der zu Anfang des Kapitels ausgesprochenen Behauptung, insbesondere also des Satzes 1, verläuft jetzt folgendermaßen:

Man nehme zunächst $h = 1$ an. Dann ist zu zeigen:

$$A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = \begin{cases} m!\, 2^m, & \text{wenn } T \text{ Quadrat,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das heißt: Ist T Quadrat, so ist die Anzahl der Darstellungen von $\mathfrak{T}$ durch die Einheitsmatrix mit derselben Zeilenzahl, falls $\mathfrak{T}$ äquivalent $\mathfrak{E}$ mod 8 und $T\mathfrak{y}'\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{y}$ primitiv ist, gleich der Anzahl der Darstellungen der Einheitsform durch sich selbst; ist T kein Quadrat, so gibt es keine Darstellung.

Um das zu beweisen, nimmt man aus (14) und (15) für jedes einzelne m den entsprechenden Wert für $\alpha_p(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ und bildet $\prod_p \alpha_p(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$. Dieses Produkt läßt sich jeweils aus den folgenden Produkten, deren Werte bekannt sind, zusammensetzen:

$$(25)\qquad \prod_{p>2}(1-p^{-2}) = \frac{2^3}{\pi^2}, \qquad \prod_{p>2}\left(1-\left(\frac{-1}{p}\right)p^{-1}\right) = \frac{4}{\pi}, \qquad \prod_{p>2}(1-p^{-6}) = \frac{2^6\cdot 3\cdot 5}{\pi^6}.$$
$$\prod_{p>2}(1-p^{-4}) = \frac{2^5\cdot 3}{\pi^4}, \qquad \prod_{p>2}\left(1-\left(\frac{-1}{p}\right)p^{-3}\right) = \frac{2^5}{\pi^3},$$

Die α_2 haben in diesem Fall folgende aus (23) zu entnehmenden Werte:

$$\alpha_2 = 2^2 \quad (m=2), \qquad \alpha_2 = \frac{3^2\cdot 5}{2^4} \quad (m=6),$$
$$\alpha_2 = 2\cdot 3 \quad (m=3,4),$$
$$\alpha_2 = \frac{3\cdot 5}{2^2} \quad (m=5), \qquad \alpha_2 = \frac{3^2\cdot 5\cdot 7}{2^7} \quad (m=7,8).$$

Das Resultat ergibt sich dann durch Anwendung von (3).

Ist $h=2$ und setzt man in (15) für ζ_p den aus (9) zu entnehmenden Wert ein, so ergibt sich

$$H_p = \sum_{l=0}^{r} \chi_p^l \left(\frac{-1}{p}\right)^l,$$

also

$$\prod_{p^r \| T} H_p = H^{(2)} = \sum_{d|T} \chi_d \left(\frac{-1}{d}\right),$$

wenn χ_d so erklärt ist wie in der Einleitung und unter $\left(\frac{-1}{d}\right)$ wie üblich das Jacobische Symbol verstanden wird. Man hat dann für jedes m zu beweisen, daß sich, falls $\mathfrak{T}$ mod 8 der Einheitsmatrix äquivalent und $T\mathfrak{y}'\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{y}$ primitiv ist, die Formel

$$A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = m!\, 2^n H^{(2)}$$

ergibt. Zum Beweis benutzt man (14) und (15), danach (25) und (3). Die α_2 ergeben sich aus (23):

$$\alpha_2 = 3 \quad (m=3,4), \qquad \alpha_2 = \frac{3^2\cdot 5}{2^5} \quad (m=6),$$
$$\alpha_2 = \frac{3\cdot 5}{2^3} \quad (m=5), \qquad \alpha_2 = \frac{3^2\cdot 5\cdot 7}{2^8} \quad (m=7,8).$$

Die Rechnung ist für jedes einzelne m, für das $3 \leqq m \leqq 8$ ist, durchzuführen.

Im Falle $h = 3$ wird, wenn man für ζ_p die Definitionsgleichung (9) beachtet, aus der Formel (15)

$$H_p = \sum_{l=0}^{r} (-1)^l \left(\frac{-T}{p}\right)^l p^{\left[-\frac{l}{2}\right]}.$$

Setzt man $\prod_{p^r \| T} H_p = H^{(3)}$, so ist zu zeigen, daß

$$A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = \frac{m!}{2!}\, 2^n T^{\frac{1}{2}} H^{(3)}$$

wird, falls $T\mathfrak{y}'\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{y}$ primitiv, $\mathfrak{T}$ äquivalent $\mathfrak{E}$ mod 8 und T Quadrat ist. Außerdem ist zu zeigen, daß man noch mit

$$\prod_{p>2} \frac{1+\left(\frac{-T}{p}\right)p^{-1}}{1+\left(\frac{-1}{p}\right)p^{-1}}$$

zu multiplizieren hat, wenn T kein Quadrat ist, die anderen Bedingungen aber erfüllt sind. Aus (23) und (24) entnimmt man, daß die Voraussetzung $\mathfrak{T}$ äquivalent $\mathfrak{E}$ mod 8 ersetzt werden kann durch die schwächere Voraussetzung $\mathfrak{T}$ ungerade und $T \equiv 1 \pmod 4$, ohne daß sich am Ergebnis etwas ändert.

Der Beweis wird wieder für jedes m ($4 \leqq m \leqq 8$) gesondert durchgeführt, indem man für $\alpha_p(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ die Werte aus (14) und (15) einsetzt. Für das $\prod_{p>2} \alpha_p(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ hat man entsprechende Werte aus (25) und

$$\prod_{p>2}\left(1+\left(\frac{-1}{p}\right)p^{-1}\right) = \frac{2}{\pi}$$

einzusetzen. Man erhält das gewünschte Resultat, wenn man noch α_2 ausrechnet:

$$\alpha_2 = \frac{3}{2} \quad (m=4), \qquad \alpha_2 = \frac{3^2\cdot 5}{2^6} \quad (m=6),$$

$$\alpha_2 = \frac{3\cdot 5}{2^4} \quad (m=5), \qquad \alpha_2 = \frac{3^2\cdot 5\cdot 7}{2^9} \quad (m=7,8).$$

Ist T nicht quadratisch, so kann man für $\prod_{p>2}\left(1+\left(\frac{-T}{p}\right)p^{-1}\right)$ im Resultat einen finiten Ausdruck einsetzen, in dem die Klassenzahl der binären quadratischen Formen der Determinante T als Faktor enthalten ist.

Für $h=4$ ergibt sich aus (15) und der Definitionsgleichung (9)

$$H_p = \sum_{l=0}^{r} \chi_p^l p^{-l}.$$

Setzt man $\prod_{p^r \| T} H_p = H^{(4)}$, so wird

$$TH^{(4)} = \sum_{d|T} \chi_d \frac{T}{d},$$

wobei χ_d die gleiche Bedeutung hat wie in (6).

Für jedes m mit $5 \leqq m \leqq 8$ muß jetzt die Formel (6) bewiesen werden. Man wendet wieder (14) und (15) an, um die $\alpha_p(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ zu erhalten; danach bildet man das $\prod_p \alpha_p(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ und trägt dafür die entsprechenden Werte aus (25) ein. Man erhält so, für jedes m gesondert, unter Anwendung von (3) die Richtigkeit der Formel (6), wenn man noch für α_2 die sich aus (23) ergebenden Werte einsetzt:

$$\alpha_2 = \frac{5}{2^3} \quad (m=5), \qquad \alpha_2 = \frac{3\cdot 5}{2^5} \quad (m=6), \qquad \alpha_2 = \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2^8} \quad (m=7,8).$$

Das Ergebnis kann man dann so formulieren:

Ist $\mathfrak{T}$ äquivalent $\mathfrak{E}$ mod 8 und $T\mathfrak{y}'\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{y}$ primitiv, so entstehen die $A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ aus den Anzahlen der Darstellungen von $\mathfrak{E}_n$ durch $\mathfrak{E}_{n+3}$ bei Multiplikation mit $\sum_{d|T} \chi_d \frac{T}{d}$.

Jetzt werde $h = 5$ angenommen. Zu beweisen ist, daß sich für jede Matrix $\mathfrak{T}$, die äquivalent $\mathfrak{E}$ mod 8 und für die $T\mathfrak{y}'\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{y}$ primitiv ist, die Anzahl der Darstellungen durch die Einheitsmatrix mit $n + 4\ (\leqq 8)$ Zeilen schreiben läßt in der Form:

$$A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = \frac{m!}{4!}\, 2^n\, T^{\frac{3}{2}}\, H^{(5)}\, \frac{\prod\limits_{p>2}\left(1 + \left(\frac{T}{p}\right) p^{-2}\right)}{\prod\limits_{p>2}(1 + p^{-2})}$$

mit

$$H_p = \sum_{l=0}^{r} (-1)^l \left(\frac{T}{p}\right)^l p^{\left[-\frac{3}{2}l\right]}; \qquad H^{(5)} = \prod_{p^r \| T} H_p.$$

Für quadratisches T wird $T^{\frac{3}{2}} H^{(5)}$ eine ganze rationale Zahl und der Quotient aus den beiden unendlichen Produkten wird $= 1$, so daß sich der Satz 1, angewandt auf den vorliegenden Fall, ergibt.

Genau so wie für kleineres h führt man den Beweis für die einzelnen m $(6 \leqq m \leqq 8)$ gesondert durch, indem man zuerst (14) und (15) beachtet, dann für $\prod\limits_p \alpha_p(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ die entsprechenden Werte aus (25) und

$$\prod_{p>2}(1 + p^{-2}) = \frac{3 \cdot 4}{\pi^2}$$

einträgt. Aus (23) erhält man

$$\alpha_2 = \frac{3 \cdot 5}{2^5}\ (m = 6), \qquad \alpha_2 = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2^8}\ (m = 7, 8),$$

und die Richtigkeit der Behauptung ergibt sich jeweils durch Anwendung der Formel (3).

Für $h = 6$ wird

$$H_p = \sum_{l=0}^{r} \chi_p^l \left(\frac{-1}{p}\right)^l p^{-2l}.$$

Man setzt $\prod\limits_{p^r \| T} H_p = H^{(6)}$, erhält

$$T^2 H^{(6)} = \sum_{d \mid T} \chi_d \left(\frac{-1}{d}\right) \frac{T^2}{d^2}$$

und hat zu beweisen:

$$A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = \frac{m!}{5!}\, 2^n\, T^2 H^{(6)} \quad (6 < m \leqq 8).$$

Der Beweis dieser Behauptung geschieht wieder mittels der Formeln (14) und (15), den Werten aus (25) und dem sich aus (23) ergebenden $\alpha_2 = \frac{3 \cdot 7}{2^5}$ $(m = 7, 8)$, indem man für $m = 7$ und $m = 8$ im vorliegenden Fall die Formel (3) anwendet.

Zum Schluß sei $h = 7$. Dann hat man nur noch für $m = 8$ und $n = 2$ zu beweisen, daß

$$A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = 7 \cdot 8 \cdot 2^2\, T^{\frac{5}{2}}\, H^{(7)}\, \frac{\prod\limits_{p>2}\left(1 + \left(\frac{-T}{p}\right) p^{-3}\right)}{\prod\limits_{p>2}\left(1 + p^{-3}\left(\frac{-1}{p}\right)\right)}$$

ist, wenn $T\mathfrak{y}'\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{y}$ primitiv, $\mathfrak{T}$ ungerade und $T \equiv 1 \pmod 4$ ist. Dabei ist $H^{(7)} = \prod_{p^r \| T} H_p$, und aus (15) entnimmt man

$$H_p = \sum_{l=0}^{r} (-1)^l \left(\frac{-T}{p}\right)^l p^{\left[-\frac{5}{2}l\right]}.$$

Diese Behauptung wird wieder mit Hilfe der Formel (3) bewiesen, und zwar mittels (14), (15) und (25) einerseits und (23) und (24) andererseits, denen man den Wert $\alpha_2 = \frac{7}{2^3}$ entnimmt. Schließlich hat man noch $\prod_{p>2} \left(1 + \left(\frac{-1}{p}\right) p^{-3}\right) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{\pi^3}$ einzutragen.

Damit sind die zu Anfang des Kapitels ausgesprochenen Behauptungen durch Diskussion aller möglichen Fälle vollständig bewiesen. Obwohl sich dafür die Formeln (14) und (15) nicht ändern, sind diese Behauptungen für den Fall, daß das Geschlecht von $\mathfrak{E}$ nicht aus einer Klasse besteht, also für $m > 8$, nicht mehr richtig, weil dann die Formeln (3) und (22) nicht mehr gelten. Es ist bemerkenswert, daß immer, wenn Satz 1 gilt, die $A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ ein Vielfaches der Anzahl der Darstellungen der Einheitsmatrix mit n Zeilen durch diejenige mit m Zeilen ist. Im zweiten Kapitel wird sich zeigen, daß man, falls $n = 2$ und $\mathfrak{T}$ äquivalent $\mathfrak{E} \bmod 8$ ist, auch bei imprimitivem $\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y}$ zu diesem Resultat kommt.

§ 4. Beispiele.

Für $m \leqq 8$ erhält man aus den Ergebnissen dieses Kapitels durch einfache Überlegungen eine Reihe von Existenzsätzen, die für $n = 2$ von Mordell, in den in der Einleitung zitierten Arbeiten, bewiesen wurden. Man erhält nämlich für primitives $T\mathfrak{y}'\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{y}$ — und diese Bedingung ist zum Beispiel für alle Formen mit quadratfreier Determinante T erfüllt — hinreichende Bedingungen für die Existenz einer Darstellung von $\mathfrak{T}$ durch die Einheitsmatrix, indem man nur noch Aussagen über die Existenz von Lösungen der Matrizenkongruenz $\mathfrak{X}'\mathfrak{X} \equiv \mathfrak{T} \pmod{2^a}$ mit genügend großem a für die im zweiten Paragraphen nicht betrachteten $\mathfrak{T}$ macht.

In der Formel (3) wurde der Siegelsche Satz über die Anzahl der Darstellungen quadratischer Formen nur für diejenigen $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ formuliert, deren Geschlecht aus einer Klasse besteht. Wendet man den Siegelschen Satz für solche $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ an, die nicht dieser einschränkenden Bedingung genügen, und setzt $\mathfrak{S} = \mathfrak{E}$ voraus, so bekommt man unter Benutzung von (14) und (15) Aussagen über die Darstellbarkeit von $\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y}$ durch Formen des Geschlechts von $\mathfrak{x}'\mathfrak{x}$ mit $m(> 8)$ Variablen. Man muß dabei allerdings voraussetzen, daß $T\mathfrak{y}'\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{y}$ primitiv ist, und die Möglichkeit der Darstellung im Dyadischen beachten. Weil diese Überlegungen verhältnismäßig einfach sind und anders geartet, als die hier durchgeführten, soll darauf hier nicht näher eingegangen werden. Es seien deshalb nur Existenzsätze formuliert, die sich ohne weitere Rechnung ergeben:

1. *Ist $T\mathfrak{y}'\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{y}$ primitiv und gilt für irgendeinen Primteiler, der in ungerader Potenz in T aufgeht,*

$$\chi_p = -\left(\frac{-1}{p}\right),$$

so ist $\mathfrak{T}$ nicht durch die Einheitsmatrix mit $n + 1$ ($\leqq 8$) Zeilen darstellbar.

2. *Es sei $T\mathfrak{y}'\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{y}$ primitiv; dann ist nach* (14), (15) *und* (3) *die Form $\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y}$ immer durch die Einheitsform mit $n + 2$ ($\leqq 8$) Variablen darstellbar, wenn die Darstellung*

im Dyadischen möglich ist. Zum Beispiel ist das auf Grund von (23) und (24) für alle ungeraden $\mathfrak{T}$, für die $T \equiv 1 \pmod 4$ ist, erfüllt.

Außer solchen Existenzsätzen ergeben sich, wenn man alle in Satz 1 gemachten Voraussetzungen als erfüllt annimmt, einige andere Resultate, die man durch weitere Spezialisierung von $\mathfrak{T}$ gewinnt:

3. *Es sei* $h = 3$, *also* $m = n + 2\ (\leqq 8)$, *und es seien alle Voraussetzungen von Satz* 1 *erfüllt. Außerdem seien alle Primteiler von* T *von der Form* $4g + 1$, *wo* g *eine natürliche Zahl bedeutet. Dann ist*

$$A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = \frac{m!}{2!}\, 2^n\, T^{\frac{1}{2}}\,.$$

Das heißt: Es ist die Anzahl der Darstellungen von $\mathfrak{T}$ durch die Einheitsmatrix mit $n + 2\ (\leqq 8)$ Zeilen gleich der Anzahl der Darstellungen der Einheitsmatrix mit n Zeilen durch diejenige mit $n + 2$ Zeilen, multipliziert mit der Quadratwurzel aus der Determinante von $\mathfrak{T}$. Eine entsprechende Formel ergibt sich für $n = 2$ und imprimitives $\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y}$ im letzten Paragraphen des zweiten Kapitels.

4. *Es sei* h *gerade, und es seien alle Bedingungen des Satzes* 1 *erfüllt. Ist dann noch*

$$\chi_d = \left(\frac{-1}{d}\right)^{\frac{h}{2}}$$

für jeden Teiler d *von* T, *so wird*

$$A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = \frac{m!}{(m-n)!}\, 2^n \sum_{d \mid T} d^{\frac{h-2}{2}}\,.$$

Ist $h = 2$, *so ist die Summe gleich der Anzahl der Teiler von* T; *ist* $h = 4$, *so ist*

$$A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = \frac{m!}{3!}\, 2^n \sum_{d \mid T} d\,.$$

Dieses Resultat sieht genau so aus wie die Jacobische Formel (2).

Zum Schluß noch ein Zahlenbeispiel: Gegeben sind die Formen

$$\mathfrak{x}'\mathfrak{x} = \sum_{\varkappa=1}^{4} x_\varkappa^2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y} = y_1^2 + y_2^2 + 9\,y_3^2,$$

und es wird gefragt nach der Anzahl der ganzen $\mathfrak{C}$ der Art, daß die Form $\mathfrak{x}'\mathfrak{x}$ durch die Substitution $\mathfrak{x} = \mathfrak{C}\mathfrak{y}$ übergeht in die Form $\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y}$. Es ist dabei

$$T\mathfrak{y}'\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{y} = 9\,y_1^2 + 9\,y_2^2 + y_3^2$$

primitiv und stellt die Zahl 1 dar, so daß $\chi_3 = 1$ ist. Außerdem ist $\mathfrak{T}$ äquivalent $\mathfrak{E}$ mod 8. Aus Satz 1 entnimmt man deshalb:

$$A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = 4!\, 2^3 \left(2 + \left(\frac{-1}{3}\right)\right) = 4!\, 2^3\,.$$

Das gleiche Resultat ergibt sich durch Abzählen.

Kapitel 2.

Die Anzahl der Darstellungen einer binären quadratischen Form mit ungerader Determinante durch eine Summe von m $(\leqq 8)$ Quadraten linearer Formen.

Mit Hilfe der Formel (3) ergibt sich die Anzahl der in der Überschrift genannten Darstellungen aus den p-adischen und den dyadischen Lösungsdichten. Falls $T\mathfrak{y}'\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{y}$ primitiv war, konnte man diese Dichten ohne mühsame Rechnung bestimmen. Die dabei verwandte Rekursionsformel (11) ist für $n = 2$ auf den Fall eines imprimitiven $T\mathfrak{y}'\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{y}$ nicht zu übertragen. Man muß vielmehr auf direktem Weg diese Lösungs-

dichten ausrechnen, wie es im folgenden unter Anwendung verallgemeinerter Gaußscher Summen gemacht wird. Die Imprimitivität von $T\mathfrak{y}'\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{y}$ bedeutet für den Fall $n = 2$, daß $\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y}$ selbst imprimitiv ist.

T soll als ungerade Zahl angenommen werden, damit die Übersicht nicht durch zuviele Fallunterscheidungen erschwert wird. Im übrigen ist das zur Berechnung der $\alpha_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ für ungerades T angewandte Verfahren leicht auf den Fall eines geraden T zu übertragen. Außerdem sind in erster Linie nicht die $\alpha_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$, sondern die $\alpha_p(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ für das Bildungsgesetz der $A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ charakteristisch.

Die Einteilung in Paragraphen ist die gleiche wie im ersten Kapitel. In einem ersten Paragraphen werden die $\alpha_p(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ bestimmt. Dabei ergibt sich der wichtige

Satz 2. 1. *Ist m ungerade, so wird*

$$26)\quad \alpha_p(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = \begin{cases} (1 - p^{1-m})\left\{\zeta_p^{s-1}\eta_p\, p^{(3-m)\frac{r+s}{2}} \sum_{\varkappa=0}^{\frac{r-1}{2}} p^{(m-2)\varkappa} + \sum_{\varkappa=0}^{\frac{r-1}{2}} p^{(4-m)\varkappa}\right\} & (r \text{ ungerade}) \\ (1 - p^{1-m})\left\{\zeta_p^{s}\, p^{(3-m)\frac{r+s}{2}} \sum_{\varkappa=0}^{\frac{r}{2}-1} p^{(m-2)\varkappa} + \sum_{\varkappa=0}^{\frac{r}{2}-1} p^{(4-m)\varkappa} + p^{(4-m)\frac{r}{2}} \sum_{\varkappa=0}^{s-r} \zeta_p^{\varkappa}\, p^{\frac{3-m}{2}\varkappa}\right\} & (r \text{ gerade}) \end{cases}$$

2. *Ist m gerade, so wird für $m > 2$*

$$(27)\quad \alpha_p(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = \left(1 - \delta_p\, p^{-\frac{m}{2}}\right)\left(1 - \varepsilon_p\, p^{1-\frac{m}{2}}\right)\left\{\left(1 + \varepsilon_p\, p^{1-\frac{m}{2}}\right) \sum_{\varkappa=0}^{r-1} \delta_p^{\varkappa} p^{\left(2-\frac{m}{2}\right)\varkappa}\left(\sum_{j=0}^{\varkappa} \delta_p^{j} p^{\left(1-\frac{m}{2}\right)j}\right)\right.$$
$$\left. + \delta_p^{r}\, p^{\left(2-\frac{m}{2}\right)r} \sum_{j=0}^{r} p^{\left(1-\frac{m}{2}\right)j}\, \delta_p^{j} \cdot \sum_{\varkappa=0}^{s-r} \varepsilon_p^{\varkappa} p^{\left[-\frac{m-3}{2}\varkappa\right]}\right\}.$$

Ist $m = 2$, so muß man wegen der Definitionsgleichung (5) die rechte Seite von (27) noch mit $\frac{1}{2}$ multiplizieren. Man beachte, daß die vor den geschweiften Klammern stehenden Faktoren gerade die aus (14) zu entnehmenden $\alpha_p(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ für $(p, T) = 1$ sind. Die Buchstaben r und s haben in (26) und (27) die gleiche Bedeutung wie bei der Erklärung von (7); es ist nämlich $p^{r+s} \parallel T$ und r der größte Exponent, für den p^r Teiler aller Elemente von $\mathfrak{T}$ ist. Die Zahl r hat also eine andere Bedeutung als im ersten Kapitel. Die Symbole δ_p, ε_p, η_p und ζ_p haben ihre alte Bedeutung, sodaß man aus früheren Definitionen für den hier vorliegenden Fall entnimmt:

$$\varepsilon_p = -\left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{m}{2}-1}\left(\frac{T}{p}\right) \ (m \text{ gerade}), \qquad \zeta_p = \chi_p\left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{m-1}{2}} \ (m \text{ ungerade}),$$

$$\delta_p = \left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{m}{2}} \quad (m \text{ gerade}), \qquad \eta_p = \left(\frac{(-1)^s T}{p}\right).$$

Während die Formeln (26) für beliebiges ungerades m (> 1) vollständig bewiesen werden, soll der Beweis der Formel (27) nur für $m = 2$ durchgeführt werden, weil der allgemeine Beweis von (27) genau so verläuft wie der von (26). Außerdem wird zur Berechnung der $A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ der Satz 2 nur für $m \leqq 8$ angewendet.

Nachdem dann im zweiten Paragraphen die $\alpha_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ für gerade und ungerade $\mathfrak{T}$ mit ungerader Determinante bestimmt sind, werden im dritten Paragraphen wieder die $A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ berechnet, und zwar für alle Matrizen $\mathfrak{T}$ mit ungerader Determinante. Diese $A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ haben Faktoren, wie man sie aus (26) und (27) entnimmt; sie sehen also wesentlich anders aus, als die von Gauß, Jacobi und Eisenstein gefundenen Formeln (8) für die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl durch eine Summe von Quadraten ganzer Zahlen, was gerade daran liegt, daß die Rekursionsformel (11) nicht mehr gilt.

Im vierten Paragraphen werden ein paar einfache Zahlenbeispiele gebracht und einige Spezialfälle angegeben, für welche die im allgemeinen komplizierten Formeln eine einfache Gestalt annehmen.

Aus dem Satz 2 und der Rekursionsformel (11) ergibt sich, wenn man noch gewisse Einschränkungen für $\mathfrak{T}$ im Dyadischen macht, ohne weiteres unter Anwendung von (3) die Anzahl der Darstellungen primitiver ternärer Formen durch die Summe von m ($\leqq 8$) Quadraten linearer Formen. Weil hierbei nur eine im ersten Paragraphen des ersten Kapitels durchgeführte Rechnung wiederholt werden müßte, soll darauf nicht näher eingegangen werden. Es sei noch erwähnt, daß man aus (26), (27), (3) und den Ergebnissen des zweiten Paragraphen die von Mordell bewiesenen Sätze über die Möglichkeit der ganzzahligen Darstellung einer imprimitiven binären Form durch eine Summe von m ($\leqq 8$) Quadraten linearer Formen erhält, falls man nur noch die Frage nach der Existenz einer Darstellung von $\mathfrak{T}$ durch $\mathfrak{E}$ im Dyadischen für Matrizen $\mathfrak{T}$ mit gerader Determinante beantwortet. Diese Aufgabe besteht jedoch aus einer einfachen Rechnung, die hier nicht ausgeführt werden soll.

§ 1. Die p-adischen Lösungsdichten.

Der Zusammenhang zwischen den p-adischen Lösungsdichten $\alpha_p(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$ und den $A_q(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$ ist durch die Definitionsgleichung (5) gegeben, und man kennt $\alpha_p(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$, wenn man $A_q(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$ für $q = p^a$ und $a > 2b$ kennt, falls $p^b \| T$ ist. Diese $A_q(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$ sollen jetzt für den Fall $\mathfrak{S} = \mathfrak{E}$ und $n = 2$ berechnet werden.

Weil es zu jeder Matrix $\mathfrak{T}$ eine mod q äquivalente Diagonalmatrix gibt, kann man von vornherein bei der Bestimmung der $A_q(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ die Matrix $\mathfrak{T}$ als Diagonalmatrix annehmen. Also werde jetzt nach den $A_q(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ gefragt, für die

$$\mathfrak{T} \equiv \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} \pmod q$$

ist und $a > 2(r + s)$ gewählt werden soll, wenn $p^r \| t_1$ und $p^s \| t_2$ $(0 \leqq r \leqq s)$ ist.

Um die Rechnung mittels verallgemeinerter Gaußscher Summen durchführen zu können, überlegt man sich zunächst folgendes:

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien n-reihige symmetrische Matrizen. Unter $Sp[\mathfrak{AB}]$ soll die Spur von $\mathfrak{AB}$, also die Summe der Diagonalglieder verstanden werden. Dann ist:

$$Sp[\mathfrak{AB}] = Sp[\mathfrak{BA}] = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} b_{kk} + 2 \sum_{1 \leq k < l \leq n} a_{kl} b_{kl} .$$

Es sei ω eine primitive q-te Einheitswurzel. Man bildet:

$$\sum_{\mathfrak{B}(q)} \omega^{Sp[\mathfrak{AB}]} .$$

Dabei soll $\mathfrak{B}(q)$ besagen, daß b_{kk} und $2b_{kl}$ $(k < l;\ k, l = 1, 2, \ldots, n)$ unabhängig voneinander ein vollständiges Restsystem mod q durchlaufen. Setzt man für $\mathfrak{AB}$ die Elemente dieses Produktes ein, so ergibt sich

$$\sum_{\mathfrak{B}(q)} \omega^{Sp[\mathfrak{AB}]} = \begin{cases} 0 & (\mathfrak{A} \not\equiv \mathfrak{N} \pmod q) \\ q^{\frac{n(n+1)}{2}} & (\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{N} \pmod q) . \end{cases}$$

$\mathfrak{N}$ bedeutet dabei die Nullmatrix. Setzt man $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}'\mathfrak{S}\mathfrak{C} - \mathfrak{T}$, so wird

$$q^{\frac{n(n+1)}{2}} A_q(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) = \sum_{\substack{\mathfrak{B}(q) \\ \mathfrak{C} (\mathrm{mod}\, q)}} \omega^{Sp[(\mathfrak{C}'\mathfrak{S}\mathfrak{C} - \mathfrak{T})\mathfrak{B}]} . \tag{28}$$

Dabei ist $q = p^a$ oder $= 2^a$ mit beliebigem $a \geqq 1$, und $\mathfrak{C} (\mathrm{mod}\, q)$ bedeutet, daß die Elemente von $\mathfrak{C}$ unabhängig voneinander ein vollständiges Restsystem mod q durchlaufen.

Diese Formel (28) wende man für $q = p^a$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{E}$ und $n = 2$ an. Ist dann $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \varrho & \sigma \\ \sigma & \tau \end{pmatrix}$, so durchläuft mit σ, wegen $p \neq 2$, auch 2σ ein vollständiges Restsystem mod q. Die erste Spalte von $\mathfrak{C}$ sei $\mathfrak{c}_1$, die zweite $\mathfrak{c}_2$, und $\omega_a\{x\}$ habe seine alte Bedeutung, nämlich $\omega_a\{x\} = e^{\frac{2\pi i}{p^a} x}$. Setzt man noch zur Abkürzung $\lambda = -\varrho t_1 - \tau t_2$ und

$$\sum_{\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2 (\mathrm{mod}\, p^a)} \omega_a\{\varrho \mathfrak{c}_1' \mathfrak{c}_1 + 2\sigma \mathfrak{c}_1' \mathfrak{c}_2 + \tau \mathfrak{c}_2' \mathfrak{c}_2\} = G_a \,, \tag{29}$$

so wird aus (28) die Gleichung:

$$p^{3a} A_{p^a}(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = \sum_{\varrho, \sigma, \tau (\mathrm{mod}\, p^a)} G_a \, \omega_a\{\lambda\} \,. \tag{30}$$

Zuerst betrachte man die durch (29) definierte verallgemeinerte Gaußsche Summe G_a. Sie ist einfacher Ausrechnung nicht ohne weiteres zugänglich, weil sie das Produkt $\mathfrak{c}_1' \mathfrak{c}_2$ enthält. Dieses Produkt kann man jedoch durch folgende Überlegung eliminieren:

Bedeutet $\mathfrak{U}$ eine mod p^a unimodulare Matrix, so ändert sich G_a nicht, wenn man $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{U}'\mathfrak{B}\mathfrak{U}$ ersetzt. Für jedes beliebige feste $\mathfrak{B}$ gibt es aber ein $\mathfrak{U}$, sodaß $\mathfrak{U}'\mathfrak{B}\mathfrak{U}$ mod p^a eine Diagonalmatrix wird. Dann ist $\sigma = 0$, und die Summation kann getrennt für $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ ausgeführt werden. Diese Transformation hat man also für alle mod p^a möglichen $\mathfrak{B}$ zu machen; dabei kann man immer diejenigen $\mathfrak{B}$ gemeinsam betrachten, deren Elemente in gleicher Weise durch p teilbar sind.

Angenommen, es sei ϱ zu p teilerfremd. Dann ist $\mathfrak{U}'\mathfrak{B}\mathfrak{U}$ eine Diagonalmatrix, falls man

$$\mathfrak{U} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -\sigma\bar{\varrho} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\mathrm{mod}\, p^a) \qquad (a > 0)$$

wählt, wobei $\bar{\varrho}$ das zu ϱ mod p^a Reziproke bedeutet. Für alle diese $\mathfrak{B}$ wird die linke Seite von (29) zu

$$G_{a,1} = \sum_{\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2 (\mathrm{mod}\, p^a)} \omega_a\{\varrho \mathfrak{c}_1' \mathfrak{c}_1 + (\tau - \sigma^2 \bar{\varrho})\, \mathfrak{c}_2' \mathfrak{c}_2\} \qquad (a > 0).$$

Jetzt nehme man an, es sei p Teiler von ϱ und τ zu p teilerfremd. Für jedes $\mathfrak{B}$ mit dieser Eigenschaft wird $\mathfrak{U}'\mathfrak{B}\mathfrak{U}$ eine Diagonalmatrix, wenn man

$$\mathfrak{U} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sigma\bar{\tau} & 1 \end{pmatrix} (\mathrm{mod}\, p^a) \qquad (a > 0)$$

wählt. Dabei bedeutet $\bar{\tau}$ das zu τ mod p^a Reziproke. Für alle diese $\mathfrak{B}$ wird die linke Seite von (29) zu

$$G_{a,2} = \sum_{\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2 (\mathrm{mod}\, p^a)} \omega_a\{(\varrho - \sigma^2\bar{\tau})\, \mathfrak{c}_1' \mathfrak{c}_1 + \tau \mathfrak{c}_2' \mathfrak{c}_2\} \qquad (a > 0).$$

Ist schließlich p Teiler von ϱ und τ, aber nicht Teiler von σ, so transformiere man $\mathfrak{B}$ mit

$$\mathfrak{U} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (\mathrm{mod}\, p^a) \qquad (a > 0).$$

Es wird $\mathfrak{U}'\mathfrak{B}\,\mathfrak{U} = \mathfrak{B}^*$, und es liegt für $\mathfrak{B}^*$ der vorher behandelte Fall vor. Für diese $\mathfrak{B}$ wird die linke Seite von (29) zu

$$G_{a,3} = \sum_{\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2 (\mathrm{mod}\, p^a)} \omega_a\{(\tau - (\tau - \sigma)^2\bar{\sigma})\, \mathfrak{c}_1' \mathfrak{c}_1 + (\varrho + \tau - 2\sigma)\, \mathfrak{c}_2' \mathfrak{c}_2\} \qquad (a > 0).$$

Dabei ist $\bar{\sigma}$ das mod p^a Reziproke zu $\varrho + \tau - 2\sigma$.

Man hat nun die Werte von $G_{a,1}$, $G_{a,2}$ und $G_{a,3}$ zu bestimmen. In $G_{a,1}$ ist die Summation über $\mathfrak{c}_1$ sofort auszuführen, weil $(\varrho, p) = 1$ ist. Es werde $\varrho\tau - \sigma^2 = \delta$ gesetzt und die ganze Zahl l aus der Reihe 0 bis a definiert durch

$$(\delta, p^a) = p^l. \tag{31}$$

Für $G_{a,3}$ ist $l = 0$. In den beiden anderen Fällen setze man

$$G_{a,1} = G_{a,1}^{(l)} \quad \text{und} \quad G_{a,2} = G_{a,2}^{(l)},$$

um die Abhängigkeit der Gaußschen Summen von l zum Ausdruck zu bringen. Macht man jetzt Gebrauch von den Formeln (18), so wird:

$$G_{a,3} = p^{ma}$$

$$(32) \qquad G_{a,1}^{(l)} = \begin{cases} p^{m\left(a+\frac{l}{2}\right)} & (a \text{ gerade}, \ l \text{ gerade}) \\ p^{m\left(a+\frac{l-1}{2}\right)} G^m\left(\frac{\delta\varrho}{p}\right)^m & (a \text{ gerade}, \ l \text{ ungerade}) \\ p^{m\left(a+\frac{l-1}{2}\right)} G^m\left(\frac{\varrho}{p}\right)^m & (a \text{ ungerade}, \ l \text{ ungerade}) \\ p^{m\left(a+\frac{l}{2}-1\right)} G^{2m}\left(\frac{\delta}{p}\right)^m & (a \text{ ungerade}, \ l \text{ gerade}). \end{cases}$$

Für $G_{a,2}^{(l)}$ gilt dasselbe mit $\left(\frac{\delta\tau}{p}\right)$ an Stelle von $\left(\frac{\delta\varrho}{p}\right)$ und $\left(\frac{\tau}{p}\right)$ an Stelle von $\left(\frac{\varrho}{p}\right)$.

Man setze:

$$\sum_{\substack{\varrho \,[\mathrm{mod}\, p^a] \\ \sigma,\, \tau \,(\mathrm{mod}\, p^a)}} G_{a,1}\, \omega_a\{\lambda\} + \sum_{\substack{\tau \,[\mathrm{mod}\, p^a] \\ \sigma,\, \varrho \,(\mathrm{mod}\, p^a)}} G_{a,2}\, \omega_a\{\lambda\} + \sum_{\substack{\sigma \,[\mathrm{mod}\, p^a] \\ \varrho,\, \tau \,(\mathrm{mod}\, p^a)}} G_{a,3}\, \omega_a\{\lambda\} = F_a,$$

wenn [mod p^a] und (mod p^a) in der alten, zum erstenmal in der Formel (17) angewandten Bedeutung gebraucht werden. Außerdem sei in der zweiten, auf der linken Seite stehenden Summe ϱ durch p teilbar, und in der dritten Summe seien ϱ und τ durch p teilbar.

Dann folgt jetzt aus (30):

$$(33) \qquad p^{3a} A_{p^a}(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = F_a + p^{2m+3(a-1)} A_{p^{a-1}}(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) \qquad (a > 0).$$

Für $a = 0$ wird

$$F_0 = \Sigma\, \omega_0\{\lambda\}\, G_0 = 1,$$

und es ergibt sich durch wiederholte Anwendung von (33):

$$p^{3a} A_{p^a}(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = \sum_{j=0}^{a} p^{2mj} F_{a-j} \qquad (a \geqq 0).$$

Nimmt man a als genügend groß an und setzt $a - j$ statt j, so ergibt sich hieraus

$$(34) \quad \mu\alpha_p(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = p^{(3-2m)a} A_{p^a}(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = \sum_{j=0}^{a} p^{-2mj} F_j \quad \text{mit} \quad \mu = \begin{cases} 2 & \text{für } m = 2 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man hat also $\alpha_p(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ bestimmt, falls man F_j kennt. Nun ist $F_j = F_{j,1} + F_{j,2} + F_{j,3}$ mit

$$F_{j,1} = \Sigma G_{j,1}\, \omega_j\{\lambda\}$$

(dabei durchläuft ϱ das reduzierte, σ und τ durchlaufen das vollständige Restsystem mod p^j),

$$F_{j,2} = \Sigma G_{j,2}\, \omega_j\{\lambda\}$$

(wobei τ das reduzierte, σ das vollständige Restsystem durchläuft, und ϱ alle die Reste mod p^j, die durch p teilbar sind) und

$$F_{j,3} = \Sigma G_{j,3}\, \omega_j\{\lambda\}$$

(wenn σ ein reduziertes Restsystem mod p^j durchläuft und ϱ und τ diejenigen Reste mod p^j durchlaufen, die durch p teilbar sind).

Zuerst betrachte man $F_{j,1}$. Denkt man sich zunächst σ fest, so durchläuft mit τ auch $\tau - \sigma^2\bar{\varrho}$ ein vollständiges Restsystem mod p^j. Man führe $\tau - \sigma^2\bar{\varrho}$ als neue Variable

ein. Entnimmt man l aus der Definitionsgleichung (31), so kann man für $\tau - \sigma^2\bar{\varrho}$ den Wert up^l eintragen, und läßt dann einerseits u ein reduziertes Restsystem mod p^{j-l}, andererseits l die Zahlen $0, 1, \ldots, j$ durchlaufen. Es wird

$$F_{j,1} = \sum_{\substack{l=0 \\ \varrho,\sigma,u}}^{j} G_{j,1}^{(l)}\, \omega_j\{\lambda\}\,, \tag{35}$$

wenn ϱ ein reduziertes Restsystem mod p^j, u ein ebensolches mod p^{j-l} und σ ein vollständiges Restsystem mod p^j durchläuft. Setzt man in (35) für $G_{j,1}^{(l)}$ die Werte aus (32) ein, so ergibt sich, daß man, abgesehen von der Summation über l, noch folgende Summationen auszuführen hat, um den Wert von $F_{j,1}$ zu erhalten:

$$\begin{matrix} \sum \omega_j\{\lambda\} & \begin{pmatrix} j & \text{gerade} \\ l & \text{gerade} \end{pmatrix}, & \sum \left(\frac{u}{p}\right)^m \omega_j\{\lambda\} & \begin{pmatrix} j & \text{gerade} \\ l & \text{ungerade} \end{pmatrix} \\ \sum \left(\frac{\varrho}{p}\right)^m \omega_j\{\lambda\} & \begin{pmatrix} j & \text{ungerade} \\ l & \text{ungerade} \end{pmatrix}, & \sum \left(\frac{u\varrho}{p}\right)^m \omega_j\{\lambda\} & \begin{pmatrix} j & \text{ungerade} \\ l & \text{gerade} \end{pmatrix} \end{matrix}. \tag{36}$$

Dabei ist genau so zu summieren wie in (35). Diese Summen (36) kann man ohne weiteres ausrechnen, wenn man in λ für τ den Wert $up^l + \sigma^2\bar{\varrho}$ einträgt und zunächst über u und σ, danach über ϱ summiert. Der Wert der Summen (36) ist wesentlich von der Größe von r und s abhängig, weil $p^r \| t_1$ und $p^s \| t_2$ war $(s \geqq r)$. Insbesondere wird $F_{j,1} = 0$, wenn $s < j - 1$ ist.

Nun werde $F_{j,2}$ betrachtet. Da jetzt p Teiler von ϱ ist, wird $\varrho - \sigma^2\bar{\tau}$ nur dann zu p teilerfremd, wenn σ es ist. Also hat nur für $(\sigma, p) = 1$ das in (31) definierte l den Wert 0. Ist σ durch p teilbar und fest, so durchläuft mit ϱ auch $\varrho - \sigma^2\bar{\tau}$ alle Reste mod p^j, die p als Teiler haben. Für jedes durch p teilbare σ ersetze man also $\varrho - \sigma^2\bar{\tau}$ durch den Wert up^l und lasse einerseits u ein reduziertes Restsystem mod p^{j-l}, andererseits l die Werte $1, 2, \ldots, j$ durchlaufen. Infolgedessen kann man schreiben:

$$F_{j,2} = \sum_{\varrho,\sigma,\tau} G_{j,2}^{(0)}\, \omega_j\{\lambda\} + \sum_{\substack{l=1 \\ \tau,\sigma,u}}^{j} G_{j,2}^{(l)}\, \omega_j\{\lambda\}\,. \tag{37}$$

In der ersten Summe durchlaufen τ und σ ein reduziertes, ϱ durchläuft ein vollständiges Restsystem mod p^j, während in der letzten Summe τ ein reduziertes Restsystem mod p^j, u ein ebensolches mod p^{j-l} und σ alle Reste mod p^j, die durch p teilbar sind, durchläuft. Man hat jetzt in (37) für $G_{j,2}^{(l)}$ die Werte aus (32) einzutragen, und es bleibt dann nur noch die Berechnung der in (36) stehenden Summen mit $\left(\frac{\tau}{p}\right)$ an Stelle von $\left(\frac{\varrho}{p}\right)$ übrig, wobei allerdings so summiert wird, wie in (37). Diese letzte Summation ist wieder von r und s abhängig, und insbesondere wird $F_{j,2} = 0$ für $s < j - 1$.

Der Wert von $F_{j,3}$ ergibt sich aus (32); es wird

$$F_{j,3} = p^{mj} \sum_{\sigma,\varrho,\tau} \omega_j\{\lambda\}\,, \tag{38}$$

wobei σ ein reduziertes Restsystem mod p^j durchläuft, und ϱ und τ diejenigen Werte des Restsystems mod p^j durchlaufen, die durch p teilbar sind. Es wird $F_{j,3} = 0$ für $s < j - 1$ und folglich auch

$$F_j = 0 \qquad \text{für } s < j - 1,$$

so daß man nachträglich in (34) die Zahl $a = s + 1$ wählen kann.

Um Satz 2 zu beweisen, muß man nur noch die Werte von F_j in die Gleichung (34) einsetzen, wobei zu beachten ist, daß $F_{j,1}$ und $F_{j,2}$ verschiedene Werte haben, je nachdem m gerade oder ungerade ist, weil der Wert der in (36) stehenden Summen zum Teil davon abhängt.

Im weiteren Verlauf der Rechnung setze man zur Abkürzung

$$p^{-2mj} F_j = g^{(j)}, \quad p^{-m} = b$$

und $j = 2h$ oder $= 2h + 1$, je nachdem es gerade oder ungerade ist, — dabei hat also h eine andere Bedeutung als im ersten Kapitel — und überlege sich, daß man auf Grund der Definition von t^* in der Einleitung und der Beschaffenheit von t_1, dem ersten Diagonalelement von $\mathfrak{T}$, jetzt $t^* \equiv t_1 \pmod{p^{s+1}}$ wählen und infolgedessen

$$\left(\frac{t_1}{p}\right) = \chi_p$$

setzen kann, wenn χ_p seine alte Bedeutung hat. Auf Grund der Definitionsgleichung (9), angewandt für ungerades m, $\mathfrak{S} = \mathfrak{E}$ und $n = 2$, wird

$$\zeta_p = \chi_p \left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{m-1}{2}}.$$

η_p hat seine alte Bedeutung:

$$\eta_p = \left(\frac{(-1)^s T}{p}\right).$$

Jetzt sei m ungerade. Nimmt man an, r und s seien größer als $2h - 1$, so wird für alle diese Paare r, s

$$g^{(2h)} = p^{6h} b^{2h}(1 - p^{-1}) - p^{4h} b^h (1 - p^{-2}) + p^{6h} b^{2h}(1 - p^{-1})(1 - p^{-2}) \sum_{l=1}^{h-1} p^{-2l} b^{-l}.$$

Man erhält dieses Ergebnis durch Ausrechnung von (35), (37) und (38). Angenommen, es seien r und $s > 2h$, dann ergibt sich dafür ebenso

$$g^{(2h+1)} = p^{6h+2} b^{2h+1}(1 - p^{-1}).$$

Also wird für $r, s > 2h - 1$

$$(39) \quad \sum_{j=0}^{2h} g^{(j)} = 1 - pb + p^2 b + p^{6h+1} b^{2h+1}(1 - p) + (1 - p^{-1})(1 + p^2 b) \sum_{k=1}^{h} p^{6k} b^{2k} + (1 - p^{-2}) \sum_{k=1}^{h} p^{4k} b^k + (1 - p^{-1})(1 - p^{-2}) \sum_{k=1}^{h} p^{6k} b^{2k} \left(\sum_{l=1}^{k-1} p^{-2l} b^{-l} \right),$$

und entsprechend ergibt sich für $r, s > 2h$

$$(40) \quad \sum_{j=0}^{2h+1} g^{(j)} = \sum_{j=0}^{2h} g^{(j)} + p^{6h+2} b^{2h+1}(1 - p^{-1}).$$

Mit Hilfe von (39) und (40) soll nun Satz 2 für ungerades m bewiesen werden. Man hat dabei vier Fälle zu unterscheiden, weil die $g^{(j)}$ davon abhängen, ob r und s gerade oder ungerade sind.

Zunächst sei $r = 2h_1 + 1$ und $s = 2h_2$ $(h_2 > h_1)$. Aus (40) erhält man $\sum_{j=0}^{2h_1+1} g^{(j)}$, indem man für h den Wert h_1 einträgt; weiterhin ergibt sich aus (35), (37) und (38) für dieses Paar r, s

$$g^{(2h_1+2)} = - p^{4h_1+2} b^{h_1+1} - p^{6h_1+4} b^{2h_1+2}(1 - p^{-1}) \sum_{l=1}^{h_1} p^{-2l} b^{-l},$$

$$\sum_{j=2h_1+3}^{2h_2} g^{(j)} = 0,$$

$$g^{(2h_2+1)} = \zeta_p \eta_p p^{3h_2+h_1+\frac{3}{2}} b^{h_2+\frac{1}{2}} (1 - p^{2h_1+1} b^{h_1+1}) + \zeta_p \eta_p p^{3h_2+h_1+\frac{7}{2}} b^{h_2+\frac{3}{2}} (1 - p^{-1}) \sum_{k=0}^{h_1-1} p^{2k} b^k.$$

In der Summe $\sum_{j=0}^{2h_2+1} g^{(j)}$ treten nur geometrische Reihen auf, die man ausrechnen und so umordnen kann, daß sich dafür der auf der rechten Seite von (26) stehende Ausdruck

ergibt. Nach (34) ist aber gerade $\sum_{j=0}^{2h_2+1} g^{(j)} = \alpha_p(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$, also ist damit Satz 2 für dieses Paar r, s bewiesen.

Als zweiten Fall nehme man $r = 2h_1 + 1$ und $s = 2h_2 + 1$ $(h_1 \leqq h_2)$ an. Indem man $h = h_1$ einträgt, entnimmt man wieder $\sum_{j=0}^{2h_1+1} g^{(j)}$ aus (40). Aus (35), (37) und (38) ergibt sich jetzt, daß

$$\sum_{j=2h_1+3}^{2h_2+1} g^{(j)} = 0$$

ist, $g^{(2h_1+2)}$ den gleichen Wert hat wie im ersten Fall und

$$g^{(2h_2+2)} = \eta_p p^{3h_2+h_1+3} b^{h_2+1} (1 - p^{2h_1+1} b^{h_1+1}) + \eta_p p^{3h_2+h_1+5} b^{h_2+2} (1 - p^{-1}) \sum_{k=0}^{h_1-1} p^{2k} b^k$$

wird. Bildet man $\sum_{j=0}^{2h_2+2} g^{(j)}$ und rechnet die darin auftretenden geometrischen Reihen aus, so erhält man nach entsprechender Umordnung die rechte Seite von (26), angewandt auf das vorliegende Paar r, s, und wegen (34) ergibt sich die Richtigkeit des Satzes 2 für diesen Fall.

Etwas mehr Rechenarbeit erfordert der Beweis des Satzes 2 für gerades r. Zuerst sei $r = 2h_1$, $s = 2h_2$ und $h_2 \geqq h_1$. Man entnimmt $\sum_{j=0}^{2h_1} g^{(j)}$ aus (39), indem man dort $h = h_1$ einträgt; und es ergeben sich aus (35), (37) und (38) die Werte:

$$g^{(2h_1+1)} = \zeta_p p^{4h_1+\frac{3}{2}} b^{h_1+\frac{1}{2}} + (1 - p^{-1}) p^{6h_1+2} b^{2h_1+1} + \zeta_p (1 - p^{-1}) p^{6h_1+\frac{3}{2}} b^{2h_1+\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^{h_1-1} p^{-2l} b^{-l},$$

$$g^{(2h)} = (1 - p^{-1}) (p^{h_1+3h} b^h + \zeta_p p^{3h+3h_1+\frac{1}{2}} b^{h+h_1+\frac{1}{2}}) + (1 - p^{-1})^2 p^{3h+h_1} b^h \sum_{l=1}^{h_1} p^{2l} b^l$$
$$(h_2 \geqq h \geqq h_1 + 1),$$

$$g^{(2h+1)} = (1 - p^{-1}) (p^{3h+3h_1+2} b^{h+h_1+1} + \zeta_p p^{3h+h_1+\frac{3}{2}} b^{h+\frac{1}{2}}) + (1 - p^{-1})^2 \zeta_p p^{3h+h_1+\frac{3}{2}} b^{h+\frac{1}{2}} \sum_{l=1}^{h_1} p^{2l} b^l$$
$$(h_1 < h < h_2),$$

$$g^{(2h_2+1)} = - p^{3h_2+h_1} b^{h_2} (p^{2h_1+1} b^{h_1+1} + \zeta_p p^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}) - (1 - p^{-1}) \zeta_p p^{3h_2+h_1+\frac{1}{2}} b^{h_2+\frac{1}{2}} \sum_{l=1}^{h_1} p^{2l} b^l.$$

Indem man denselben Schluß macht, wie in den ersten beiden Fällen, erkennt man die Richtigkeit von (26) für gerades r und s.

Endlich werde $r = 2h_1$ und $s = 2h_2 + 1$ $(h_1 \leqq h_2)$ angenommen. Die Rechnung ist ähnlich wie für den vorhergehenden Fall. Es ergibt sich für $g^{(2h_1+1)}$, $g^{(2h)}$ $(h_2 \geqq h \geqq h_1 + 1)$ und $g^{(2h+1)}$ $(h_1 < h < h_2)$ genau dasselbe wie im Fall eines geraden s, und für $g^{(2h_2+1)}$ ergibt sich jetzt das $(1 - p)$-fache des damaligen Wertes. $\sum_{j=0}^{2h_1} g^{(j)}$ entnimmt man aus (39), und es wird außerdem

$$g^{(2h_2+2)} = - p^{3h_2+h_1} b^{h_2} (p^2 b + \zeta_p p^{2h_1+\frac{5}{2}} b^{h_1+\frac{3}{2}}) - (1 - p^{-1}) p^{3h_2+h_1+4} b^{h_2+2} \sum_{l=0}^{h_1-1} p^{2l} b^l.$$

Die Richtigkeit der Formel (26) für diesen letzten Fall ergibt sich wieder unter Anwendung von (34) durch Ausrechnen und Umordnen der geometrischen Reihen in $\sum_{j=0}^{2h_2+2} g^{(j)}$.

Jetzt sind die Formeln (26), und damit der erste Teil des Satzes 2 vollständig bewiesen. Der Beweis des zweiten Teiles geschieht ganz genau so und soll deshalb hier nur für den speziellen Fall $m = 2$ durchgeführt werden. Da die Darstellung von $\mathfrak{T}$ durch $\mathfrak{E}$ für $m = n$ nur bei quadratischem T möglich ist, kann man sich von vornherein auf solche $\mathfrak{T}$ beschränken.

Es werde also gefragt nach dem Wert der rechten Seite von (34), wenn $m = 2$ und T Quadrat ist.

Rechnet man für $r, s > 2h - 1$ die Summen (35), (37) und (38) aus, so erhält man

$$g^{(2h)} = (h+1)p^{2h} + (h-1)p^{2h+3} + h\,p^{2h}(1-p^{-1})(\delta_p - \delta_p\,p^{-2} - p^{-1}),$$

wenn δ_p seine alte Bedeutung hat und deshalb für diesen Fall $\delta_p = \left(\frac{-1}{p}\right)$ ist. Es ergibt sich ebenso für $r, s > 2h$

$$g^{(2h+1)} = (h+1)p^{2h+1}(1 - p^{-1} + \delta_p - \delta_p\,p^{-2}) - hp^{2h}(\delta_p - \delta_p\,p^{-2} + p^{-1} - p^{-2}).$$

Addition ergibt

$$(41) \qquad \sum_{j=0}^{2h} g^{(j)} = (h+1)p^{2h} + hp^{2h}(\delta_p - \delta_p\,p^{-2} - p^{-2}) \qquad (r, s > 2h-1)$$

$$(42) \qquad \sum_{j=0}^{2h+1} g^{(j)} = (h+1)p^{2h+1}(1 + \delta_p - \delta_p\,p^{-2}) - h\,p^{2h-1} \qquad (r, s > 2h).$$

Um den Satz 2 für $m = 2$ zu beweisen, braucht man, weil T Quadrat ist, nur zwei Fälle zu betrachten:

1) $r = 2h_1$, $s = 2h_2$ und $h_1 \leqq h_2$.

Den Wert von $\sum_{j=0}^{2h_1} g^{(j)}$ entnimmt man aus (41), indem man dort $h = h_1$ einträgt; weiterhin wird

$$g^{(2h_1+1)} = h_1\,p^{2h_1-2}(1 - p + \delta_p) - (h_1+1)\,p^{2h_1-1}\,\delta_p, \qquad g^{(2h+1)} = 0 \text{ für } h_1 < h < h_2,$$

$$\sum_{h=h_1+1}^{h_2} g^{(2h)} = (p^{2h_1} - p^{h_1+h_2})\{h_1(p^{-1} - \delta_p) + (h_1+1)(p^{-1}\,\delta_p - 1)\},$$

$$g^{(2h_2+1)} = h_1\,p^{h_1+h_2}(\delta_p - p^{-1}) + (h_1+1)\,p^{h_1+h_2}(1 - \delta_p\,p^{-1}).$$

Trägt man diese Werte in (34) ein, so erkennt man die Gültigkeit von

$$(43) \qquad \alpha_p(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = p^{\frac{r+s}{2}}(1 - \delta_p\,p^{-1})\left(\delta_p\,\frac{r}{2} + \frac{r}{2} + 1\right).$$

Dieselbe Formel ergibt sich aber, wenn man den Satz 2 für $m = 2$, quadratisches T und gerades r und s ausspricht.

2) $r = 2h_1 + 1$, $s = 2h_2 + 1$ und $h_1 \leqq h_2$.

Den Wert von $\sum_{j=0}^{2h_1+1} g^{(j)}$ entnimmt man aus (42) mit h_1 an Stelle von h. Außerdem ergibt sich aus (35), (37) und (38):

$$g^{(2h_1+2)} = h_1\,p^{2h_1-1} + (h_1+1)\,p^{2h_1}(\delta_p\,p^{-1} - 1 - \delta_p), \qquad \sum_{h=h_1+2}^{h_2} g^{(2h)} = 0,$$

$$\sum_{h=h_1+1}^{h_2} g^{(2h+1)} = (h_1+1)(1-p)(1+\delta_p)(p^{2h_1} - p^{h_1+h_2}),$$

$$g^{(2h_2+2)} = (h_1+1)\,p^{h_1+h_2}(p-1)(1+\delta_p).$$

Durch Addition und Anwendung von (34) findet man

$$(44) \qquad \alpha_p(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = p^{\frac{r+s}{2}}(1 - \delta_p\,p^{-1})\,\frac{r+1}{2}(1+\delta_p),$$

und daraus ergibt sich die Richtigkeit des Satzes 2, angewandt auf $m = 2$, quadratisches T und ungerades r und s.

Durch den Beweis des Satzes 2, der für ungerades m vollständig, für gerades m in einem speziellen Fall durchgeführt wurde, ist jetzt die Aufgabe dieses Paragraphen, die p-adischen Lösungsdichten im Falle $\mathfrak{S} = \mathfrak{E}$ und $n = 2$ zu bestimmen, gelöst.

§ 2. Die dyadischen Lösungsdichten.

Ist

$$\mathfrak{T} \equiv \begin{pmatrix} t_1 & t_3 \\ t_3 & t_2 \end{pmatrix} \pmod{2^a}$$

mit $a > 2b$ und $2^b \| 2T$, so folgt aus (28)

$$\mu\, \alpha_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = 2^{-2am} \sum_{\varrho, \sigma, \tau \pmod{2^a}} G_a(\mathfrak{B})\, \omega_a\{\lambda - \sigma t_3\}, \tag{45}$$

wobei $\mathfrak{B}$ und λ ihre alte Bedeutung haben und $\mu = 2$ ist für $m = 2$ und $\mu = 1$ sonst.

Wenn entsprechend wie bei einer ungeraden Primzahl $e^{\frac{\pi i}{2^{l-1}} x} = \omega_l\{x\}$ gesetzt wird, wobei l irgendeine ganze Zahl $\geqq 0$ bedeutet, so hat man außerdem in (45) einzutragen

$$G_l(\mathfrak{B}) = \sum_{\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2 \pmod{2^l}} \omega_l\{\varrho\, \mathfrak{c}_1' \mathfrak{c}_1 + \sigma\, \mathfrak{c}_1' \mathfrak{c}_2 + \tau\, \mathfrak{c}_2' \mathfrak{c}_2\} \quad \text{mit } l = a. \tag{46}$$

Diese Gaußschen Summen $G_l(\mathfrak{B})$ betrachte man zuerst. Weil σ nicht durch 2σ ersetzt werden kann, muß man hier anders verfahren als bei der Berechnung der G_a im vorigen Paragraphen.

Man nimmt erst σ als ungerade an und leitet dafür die Beziehung

$$G_l(\mathfrak{B}) = 2^{2m} G_{l-2}(\mathfrak{B}) \qquad (l \geqq 2)$$

ab. Durch wiederholtes Anwenden dieser Formel kommt man zu

$$G_l(\mathfrak{B}) = \begin{cases} 2^{ml} & (l \text{ gerade}) \\ 2^{m(l-1)} G_1(\mathfrak{B}) & (l \text{ ungerade}), \end{cases} \tag{47}$$

mit

$$G_1(\mathfrak{B}) = \begin{cases} 2^m & (\varrho, \tau \text{ nicht beide ungerade}) \\ (-2)^m & (\varrho, \tau \text{ beide ungerade}). \end{cases}$$

Ist dagegen σ gerade, so wird die Matrix

$$\overline{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} \varrho & \frac{\sigma}{2} \\ \frac{\sigma}{2} & \tau \end{pmatrix}$$

ganz, es wird $\varrho\, \mathfrak{c}_1' \mathfrak{c}_1 + \sigma\, \mathfrak{c}_1' \mathfrak{c}_2 + \tau\, \mathfrak{c}_2' \mathfrak{c}_2 = Sp\,[\mathfrak{C}' \mathfrak{C} \overline{\mathfrak{B}}]$, und der Wert der rechten Seite von (46) ändert sich nicht, wenn man bei ungeradem ϱ oder τ die Matrix $\overline{\mathfrak{B}}$ mit einer mod 2^a unimodularen Matrix auf Diagonalform transformiert. Diese Transformation geschieht genau so wie früher diejenige von $\mathfrak{B}$. Für ungerades ϱ oder τ hat man damit die Summationen über $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ voneinander getrennt. Sind dagegen ϱ und τ auch gerade, so wird

$$G_l(\mathfrak{B}) = 2^{2m} G_{l-1}(\mathfrak{B}), \tag{48}$$

und man kann mit $G_{l-1}(\mathfrak{B})$ wieder so verfahren, wie vorher mit $G_l(\mathfrak{B})$.

In (45) durchlaufen ϱ, τ und σ vollständige Restsysteme mod 2^a. Will man also in (45) für $G_a(\mathfrak{B})$ jeweils den richtigen Wert eintragen, so muß man wegen (48) alle $G_l(\mathfrak{B})$ mit $l = 0, 1, \ldots, a$ und ungeradem ϱ oder τ oder σ kennen. Bei ungeradem σ und $l > 0$ ergeben sich die Werte der $G_l(\mathfrak{B})$ aus (47), und bei geradem σ nehme man eine geeignete Transformation vor, so daß man die Werte von $G_l(\mathfrak{B})$ durch Berechnung der einfachen Gaußschen Summen

$$G_\nu^{(l)} = \sum_{c \pmod{2^l}} \omega_l\{\nu c^2\}$$

erhält. Man rechnet leicht nach, daß sich dafür folgende Formeln ergeben:

$$G_\nu^{(0)} = 1,$$

$$G_\nu^{(1)} = \begin{cases} 0 & (\nu \text{ ungerade}) \\ 2 & (\nu \text{ gerade}), \end{cases}$$

$$G_\nu^{(3)} = \begin{cases} 4\omega_3\{\nu\} & (\nu \text{ ungerade}) \\ 2G_{\frac{\nu}{2}}^{(2)} & (\nu \text{ gerade}) \end{cases}$$

(49)

und für $l > 3$

$$G_\nu^{(2)} = \begin{cases} 2(1+i) & \text{für } \nu \equiv 1 \pmod 4 \\ 0 & \text{für } \nu \equiv 2 \pmod 4 \\ 2(1-i) & \text{für } \nu \equiv 3 \pmod 4 \\ 4 & \text{für } \nu \equiv 0 \pmod 4, \end{cases} \qquad G_\nu^{(l)} = \begin{cases} 2G_\nu^{(l-2)} & (\nu \text{ ungerade}) \\ 2G_{\frac{\nu}{2}}^{(l-1)} & (\nu \text{ gerade}). \end{cases}$$

Von hier ab kann die Rechnung genau so durchgeführt werden, wie es für ungerade Primzahlen im ersten Paragraphen dieses Kapitels gemacht wurde, indem man in (45) die Summanden in geeigneter Weise zusammenfaßt und nötigenfalls noch eine Variablensubstitution vornimmt. Weil die Rechnung für die gerade Primzahl noch mühsamer ist als für ungerade Primzahlen, soll hier der allgemeine Fall nicht diskutiert, sondern nur der Verlauf der Rechnung im Fall eines ungeraden T angegeben werden. Wegen des in der Einleitung zitierten Satzes über die Größe von a kann hier $a = 3$ gesetzt werden.

Infolgedessen werde jetzt gefragt nach dem Wert der rechten Seite von (45) für $a = 3$, $\mathfrak{T} \equiv \begin{pmatrix} t_1 & t_3 \\ t_3 & t_2 \end{pmatrix} \pmod 8$ und ungerades $t_1 t_2 - t_3^2$. Um die Rechnung zu vereinfachen, sucht man zuerst eine zu $\mathfrak{T}$ mod 8 äquivalente Matrix auf, die eine möglichst einfache Gestalt hat. Ist t_1 oder t_2 ungerade, so gibt es eine zu $\mathfrak{T}$ mod 8 äquivalente Diagonalmatrix, sind dagegen t_1 und t_2 beide gerade, was in unserer früheren Terminologie bei ungeradem T heißt, daß $\mathfrak{T}$ gerade ist, so soll gezeigt werden, daß $\mathfrak{T}$ mod 8 einer Matrix $\bar{\mathfrak{T}}$ äquivalent ist, für die die Kongruenz

$$\bar{\mathfrak{T}} \equiv \begin{pmatrix} \bar{t}_1 & 1 \\ 1 & \bar{t}_2 \end{pmatrix} \pmod 8$$

besteht. Ist nämlich

$$\mathfrak{U} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{pmatrix} \pmod 8,$$

wobei d einer noch zu bestimmenden Restklasse mod 8 angehört, so wird

$$\mathfrak{U}'\mathfrak{T}\mathfrak{U} \equiv \begin{pmatrix} t_1 & dt_1 + t_3 \\ dt_1 + t_3 & d^2 t_1 + 2dt_3 + t_2 \end{pmatrix} \pmod 8.$$

Ist nun $t_1 \equiv 2 \pmod 4$, so gibt es immer ein d, sodaß $dt_1 \equiv 1 - t_3 \pmod 8$ wird, und man kann für diesen Fall $\bar{\mathfrak{T}} \equiv \mathfrak{U}'\mathfrak{T}\mathfrak{U} \pmod 8$ wählen. Ist $t_1 \equiv 0 \pmod 4$, aber $t_2 \equiv 2 \pmod 4$, so überlegt man sich dasselbe, nur mit $\mathfrak{U}'$ an Stelle von $\mathfrak{U}$. Sind dagegen t_1 und $t_2 \equiv 0 \pmod 4$, so hat man die ganze Betrachtung mit $\mathfrak{U}'\mathfrak{T}\mathfrak{U}$ an Stelle von $\mathfrak{T}$ durchzuführen, wenn man in $\mathfrak{U}$ den Wert $d \equiv 1 \pmod 8$ einsetzt; denn dann ist das letzte Element in $\mathfrak{U}'\mathfrak{T}\mathfrak{U}$ nicht durch 4 teilbar.

Man hat also bei der Berechnung von $\alpha_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ für ungerades T zwei Fälle zu unterscheiden:

$$1)\ \mathfrak{T} \equiv \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} \pmod 8, \qquad 2)\ \mathfrak{T} \equiv \begin{pmatrix} t_1 & 1 \\ 1 & t_2 \end{pmatrix} \pmod 8,$$

wobei man beachte, daß im ersten Fall $t_1 t_2$ ungerade ist, während im zweiten Fall t_1 und t_2 gerade sein müssen.

Aus der Gleichung (45) wird

$$\mu\alpha_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = \begin{cases} 2^{-6m} F^{(1)} & \text{im ersten Fall} \\ 2^{-6m} F^{(2)} & \text{im zweiten Fall} \end{cases} \tag{50}$$

mit

$$F^{(1)} = \Sigma G_3(\mathfrak{B})\,\omega_3\{\lambda\} \qquad (t_1\, t_2 \text{ ungerade})$$
$$F^{(2)} = \Sigma G_3(\mathfrak{B})\,\omega_3\{\lambda - \sigma\} \quad (t_1 \text{ und } t_2 \text{ gerade}),$$

wobei ϱ, τ und σ ein vollständiges Restsystem mod 8 durchlaufen.

Diese $F^{(j)}\,(j = 1, 2)$ müssen in geeigneter Weise in Teilsummen zerlegt werden. Eine Teilsumme von $F^{(j)}$, in der ϱ und τ vollständige Restsysteme mod 8 durchlaufen und σ fest bleibt, werde mit $F_\sigma^{(j)}$ bezeichnet. Aus den Gleichungen (47) folgt:

$$F_\sigma^{(j)} = 0 \quad (j = 1, 2), \text{ falls } \sigma \text{ ungerade.}$$

Weil es kürzer ist, soll für gerades σ ein wenig anders verfahren werden, als es für den allgemeinen Fall skizziert wurde. Außerdem setze man noch zur Abkürzung

$$G_\nu^{(3)} = G_\nu\,.$$

Unter G_ν^m wird dann im Verlauf der Rechnung die m-te Potenz von G_ν verstanden.

Nun wird

$$(51)\quad F_0^{(1)} + F_4^{(1)} = \sum G_\varrho^m G_\tau^m\,\omega_3\{\lambda\} + \sum_{\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2 (\mathrm{mod}\ 8)} \omega_3\{\varrho\mathfrak{c}_1'\mathfrak{c}_1 + \tau\mathfrak{c}_2'\mathfrak{c}_2 + 4\mathfrak{c}_1'\mathfrak{c}_2 + \lambda\}\,.$$

Dabei ist zu summieren über alle geraden ϱ und τ des Restsystems mod 8. Man erhält (51), indem man erst in $F_4^{(1)}$ alle Summanden mit ungeradem ϱ zusammenfaßt, das zugehörige $\overline{\mathfrak{B}}$ auf Diagonalform transformiert und für die Summanden mit geradem ϱ und ungeradem τ dasselbe macht. Sind ϱ und τ beide gerade, so ergibt sich die letzte auf der rechten Seite von (51) stehende Summe. Bei Addition von $F_0^{(1)}$ und $F_4^{(1)}$ fallen die Summanden mit ungeradem ϱ und τ weg, so daß man (51) erhält.

Entsprechend ergibt sich

$$(52)\quad F_0^{(2)} + F_4^{(2)} = \sum G_\varrho^m G_\tau^m\,\omega_3\{\lambda\} - \sum_{\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2 (\mathrm{mod}\ 8)} \omega_3\{\varrho\mathfrak{c}_1'\mathfrak{c}_1 + \tau\mathfrak{c}_2'\mathfrak{c}_2 + 4\mathfrak{c}_1'\mathfrak{c}_2 + \lambda\}\,,$$

wobei über alle geraden ϱ und τ des Restsystems mod 8 summiert wird.

Ist nun $\sigma \equiv 2 \pmod 4$, so erhält man ebenso

$$(53)\quad F_2^{(1)} + F_6^{(1)} = 2\Big\{ \sum_{\substack{\varrho [\mathrm{mod}\ 8] \\ -\varrho+\tau (\mathrm{mod}\ 8)}} G_\varrho^m G_{-\varrho+\tau}^m\,\omega_3\{\lambda\} + \sum_{-\tau+\varrho,\ \tau [\mathrm{mod}\ 8]} G_\tau^m G_{-\tau+\varrho}^m\,\omega_3\{\lambda\}\Big\}$$

und auch

$$F_2^{(2)} + F_6^{(2)} = 0\,.$$

Nun sind noch die auf der rechten Seite von (51), (52) und (53) stehenden Summen, und zwar für jedes m, auszurechnen. Dabei wendet man (47), (48) und (49) an und trägt zum Schluß die errechneten Werte in die Formel (45) ein. Obwohl hier nicht wie in dem im ersten Kapitel behandelten Fall ein prinzipieller Grund vorliegt, $m \leqq 8$ anzunehmen, sollen die Werte der $\alpha_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ auch hier nur für diesen Fall angegeben werden, denn nur dafür können ja in der Folge mit Hilfe der Formel (3) die $A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ bestimmt werden.

Vorher überlege man sich, daß die Resultate der Summen in (51), (52) und (53) von den Resten von t_1 und t_2 mod 8 abhängen. Diese t_1 und t_2 erhält man jedoch bei einem vorgelegten $\mathfrak{T}$ erst durch Transformation auf die Normalform. Indessen stellt es sich heraus, daß man die Resultate invariant formulieren kann. Man kann natürlich im hier vorliegenden Fall $n = 2$ die Klassen mod 8 eindeutig charakterisieren durch die Werte der Determinante und die durch $\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y}$ dargestellten Zahlen. Nachdem man das gezeigt hat, kommt man zu dem folgenden Resultat:

m	$\alpha_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$	Fall
2	4	$\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y}$ stellt mod 4 die 1 dar, $T \equiv 1 \pmod 8$
	0	sonst
3	3	1) $\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y}$ stellt mod 4 die 1 dar, $T \equiv 1 \pmod 4$ 2) $\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y}$ stellt nur gerade Zahlen dar, $T \equiv 3 \pmod 8$
	0	sonst
4	3	$\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y}$ stellt nur gerade Zahlen dar, $T \equiv 3 \pmod 8$
	$\frac{3}{2}$	$T \equiv 1 \pmod 4$
	1	$\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y}$ stellt auch ungerade Zahlen dar, $T \equiv 3 \pmod 8$
	0	sonst
5	$\frac{1\,5}{8}$	1) $\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y}$ stellt mod 4 die 3 dar, $T \equiv 1 \pmod 4$ 2) $\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y}$ stellt nur gerade Zahlen dar, $T \equiv 3 \pmod 8$
(54)	$\frac{5}{8}$	sonst
6	$\frac{1\,5}{3\,2}$	$\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y}$ stellt mod 4 die 1 dar, $T \equiv 1 \pmod 8$
	$\frac{2\,1}{3\,2}$	„ „ „ „ 1 „ $T \equiv 5 \pmod 8$
	$\frac{5\,5}{3\,2}$	„ „ „ „ 3 „ $T \equiv 1 \pmod 8$
	$\frac{4\,5}{3\,2}$	„ „ „ „ 3 „ $T \equiv 5 \pmod 8$
	$\frac{1\,5}{1\,6}$	sonst
7	$\frac{2\,1}{3\,2}$	1) $\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y}$ stellt mod 4 die 1 dar, $T \equiv 1 \pmod 4$ 2) $\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y}$ stellt nur gerade Zahlen dar, $T \equiv 3 \pmod 8$
	$\frac{3\,5}{3\,2}$	sonst
8	$\frac{2\,1}{3\,2}$	$\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y}$ stellt nur gerade Zahlen dar, $T \equiv 3 \pmod 8$
	$\frac{3\,5}{3\,2}$	1) $\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y}$ stellt auch ungerade Zahlen dar, $T \equiv 3 \pmod 8$ 2) $\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y}$ stellt nur gerade Zahlen dar, $T \equiv 7 \pmod 8$
	$\frac{3\,7}{3\,2}$	$\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y}$ stellt auch ungerade Zahlen dar, $T \equiv 7 \pmod 8$
	$\frac{7}{8}$	sonst.

§ 3. Die Anzahl der ganzen rationalen Darstellungen.

Der Zusammenhang zwischen den p-adischen Dichten $\alpha_p(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$, den dyadischen Dichten $\alpha_2(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$ und der Anzahl der ganzen rationalen Darstellungen von $\mathfrak{T}$ durch $\mathfrak{S}$ wird für den Fall, daß das Geschlecht von $\mathfrak{S}$ nur aus einer Klasse besteht, durch die Formel (3) gegeben, die also für $\mathfrak{S} = \mathfrak{E}$ und $m \leqq 8$ sicher gilt. Man hat jetzt nur noch für jedes einzelne m ($\leqq 8$) die $\alpha_p(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ aus Satz 2 und die $\alpha_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ aus der Tabelle (54) in die Formel (3) einzutragen, und bekommt so die Anzahl der ganzen rationalen Darstellungen einer binären quadratischen Form $\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y}$, mit ungerader Determinante T, durch eine Summe von m ($\leqq 8$) Quadraten linearer Formen.

Zuerst sei $m = 2$. Aus den Gleichungen (14) ergibt sich, daß $A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = 0$ ist bei nicht quadratischem T. Ist T Quadratzahl, so stehen die $\alpha_p(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ in der folgenden Form bereits in den Gleichungen (43) und (44): $\alpha_p(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = (1 - \delta_p p^{-1}) \cdot H_p$ mit

$$\delta_p = \left(\frac{-1}{p}\right) \text{ und } H_p = \begin{cases} p^{\frac{r+s}{2}} \left(\frac{r}{2}\delta_p + \frac{r}{2} + 1\right) & (r \text{ gerade}) \\ p^{\frac{r+s}{2}} (\delta_p + 1)\frac{r+1}{2} & (r \text{ ungerade}). \end{cases}$$

Man setze allgemein

$$\prod_{p|T} H_p = H^{(h)}, \tag{55}$$

wenn p alle Primteiler von T durchläuft und h in seiner alten, zum erstenmal in der Definitionsgleichung (9) stehenden Bedeutung benutzt wird. Diese Bezeichnung des Produktes entspricht derjenigen aus dem ersten Kapitel; sie ist deshalb vernünftig, weil die H_p, in Abhängigkeit von h und nicht von m allein, zufolge der Rekursionsformel (11) als Faktoren auftreten, wenn man die Anzahl der Darstellungen durch die Einheitsmatrix für entsprechende $\mathfrak{T}$ mit mehr als zwei Zeilen berechnet.

Wendet man jetzt die Formel (3) an und setzt für das unendliche Produkt $\prod_{p>2}(1-\delta_p p^{-1})$ den entsprechenden Wert aus (25) ein, so wird

$$A(\mathfrak{E},\mathfrak{T}) = \begin{cases} 8T^{-\frac{1}{2}} H^{(1)} & \text{wenn } T \text{ Quadrat ist und } \mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y} \bmod 4 \text{ die 1 darstellt,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist $m = 3$, so erhält man aus Satz 2

$$\alpha_p(\mathfrak{E},\mathfrak{T}) = (1-p^{-2}) H_p$$

mit

$$H_p = \begin{cases} (1+\zeta_p^{s-1}\eta_p) \sum_{k=0}^{\frac{r-1}{2}} p^k & (r \text{ ungerade}) \\ (1+\zeta_p^{s}) \sum_{k=0}^{\frac{r}{2}-1} p^k + p^{\frac{r}{2}} \sum_{k=0}^{s-r} \zeta_p^k & (r \text{ gerade}). \end{cases}$$

Dabei ergibt sich aus der Definition, angewandt auf den vorliegenden Fall,

$$\zeta_p = \left(\frac{-1}{p}\right)\chi_p, \qquad \eta_p = \left(\frac{(-1)^s T}{p}\right).$$

Indem man noch (55) beachtet, die Formel (3) anwendet und für das auftretende Produkt den entsprechenden Wert, ersichtlich aus (25), einträgt, erhält man

$$A(\mathfrak{E},\mathfrak{T}) = \begin{cases} 3\cdot 2^3 \cdot H^{(2)}, & \text{1. wenn } \mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y} \bmod 4 \text{ die 1 darstellt,} \\ & \text{2. wenn } \mathfrak{T} \text{ gerade und } T \equiv 3 \pmod 4 \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Jetzt sei $m = 4$. Man entnimmt aus Satz 2:

$$\alpha_p(\mathfrak{E},\mathfrak{T}) = (1-p^{-2})(1-\varepsilon_p p^{-1}) H_p$$

mit

$$\varepsilon_p = -\left(\frac{-T}{p}\right) \text{ und } H_p = (1+\varepsilon_p p^{-1}) \sum_{0\le j\le k\le r-1} p^{-j} + \sum_{\substack{0\le k\le s-r \\ 0\le l\le r}} \varepsilon_p^k p^{-l+\left[\frac{-k}{2}\right]}.$$

Wendet man nun die Definitionsgleichung (55) an und trägt für das Produkt $\prod_{p>2}(1-p^{-2})$ seinen Wert ein, so ergibt sich aus Formel (3):

$$A(\mathfrak{E},\mathfrak{T}) = \alpha_2(\mathfrak{E},\mathfrak{T})\, 2^4 \pi\, T^{\frac{1}{2}} H^{(3)} \cdot \prod_{p>2}(1-\varepsilon_p p^{-1}). \tag{56}$$

Hierin hätte man noch für $\alpha_2(\mathfrak{E},\mathfrak{T})$ die Werte aus (54) einzutragen und den Wert des Produktes, erstreckt über die ungeraden Primzahlen in natürlicher Reihenfolge, einzusetzen, um einen finiten Ausdruck zu erhalten. Wie schon im vorigen Kapitel erwähnt wurde, enthält dann das Resultat die Klassenanzahl der binären quadratischen Formen mit der Determinante T als Faktor.

Für den Fall $m = 5$ steht das Ergebnis als Beispiel in der Einleitung. Man entnimmt aus Satz 2

$$\alpha_p(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = (1 - p^{-4}) H_p,$$

wobei H_p den in der Einleitung angegebenen Wert hat. Beachtet man noch die Definitionsgleichung (55), so ergibt sich aus der Formel (3):

$$A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = \begin{cases} 3 \cdot 2^4 \cdot 5 \cdot TH^{(4)}, & \text{1. wenn } \mathfrak{T} \text{ gerade und } T \equiv 3 \pmod 8 \text{ ist,} \\ & \text{2. wenn } T \equiv 1 \pmod 4 \text{ ist und } \mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y} \bmod 4 \text{ die 3 darstellt,} \\ 2^4 \cdot 5 \cdot TH^{(4)} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist $m = 6$, so ergibt sich aus Satz 2:

$$\alpha_p(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = (1 - \delta_p p^{-3})(1 - \varepsilon_p p^{-2}) \cdot H_p,$$

und es ist in diesem Fall $\delta_p = \left(\frac{-1}{p}\right)$, $\varepsilon_p = -\left(\frac{T}{p}\right)$ und

$$H_p = (1 + \varepsilon_p p^{-2}) \sum_{0 \leqq j \leqq k \leqq r-1} \delta_p^{kj} p^{-k-2j} + \delta_p^r p^{-r} \sum_{\substack{0 \leqq k \leqq s-r \\ 0 \leqq l \leqq r}} \delta_p^l \varepsilon_p^k p^{-2l+\left[-\frac{3}{2}k\right]}.$$

Wendet man jetzt die Formel (3) an und die Definitionsgleichung (55), und entnimmt den Wert von $\prod_{p>2}(1 - \delta_p p^{-3})$ aus (25), so wird

$$A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = \alpha_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) \cdot \frac{2^6}{3} \pi^2 T^{\frac{1}{2}} H^{(5)} \prod_{p>2} (1 - \varepsilon_p p^{-2}),$$

wobei man noch für $\alpha_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ die entsprechenden Werte aus (54) einzutragen hat. Durch Ausrechnung des unendlichen Produktes kommt man zu einem finiten Ausdruck für $A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$.

Wenn $m = 7$ ist, wird

$$\alpha_p(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = (1 - p^{-6}) H_p$$

mit

$$H_p = \begin{cases} \zeta_p^{s-1} \eta_p p^{-2(r+s)} \sum_{k=0}^{\frac{r-1}{2}} p^{5k} + p^{3\frac{1-r}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{r-1}{2}} p^{3k} & (r \text{ ungerade}) \\ \zeta_p^s p^{-2(r+s)} \sum_{k=0}^{\frac{r}{2}-1} p^{5k} + p^{3\left(1-\frac{r}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\frac{r}{2}-1} p^{3k} + p^{-3\frac{r}{2}} \sum_{k=0}^{s-r} \zeta_p^k p^{-2k} & (r \text{ gerade}). \end{cases}$$

ζ_p und η_p haben den gleichen Wert wie im Fall $m = 3$. Wendet man die Formel (3) an, so ergibt sich:

$$A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = \begin{cases} 3 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot T^2 H^{(6)}, & \text{1. wenn } \mathfrak{T} \text{ gerade ist und } T \equiv 3 \pmod 4, \\ & \text{2. wenn } \mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y} \bmod 4 \text{ die 1 darstellt und } T \equiv 1 \pmod 4 \text{ ist,} \\ 5 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot T^2 H^{(6)} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zum Schluß werde der Fall $m = 8$ betrachtet. Aus Satz 2 ergibt sich

$$\alpha_p(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = (1 - p^{-4})(1 - \varepsilon_p p^{-3}) H_p$$

mit

$$\varepsilon_p = -\left(\frac{-T}{p}\right) \quad \text{und} \quad H_p = (1 + \varepsilon_p p^{-3}) \sum_{0 \leqq j \leqq k \leqq r-1} p^{-2k-3j} + p^{-2r} \sum_{\substack{0 \leqq l \leqq r \\ 0 \leqq k \leqq s-r}} \varepsilon_p^k p^{-3l+\left[\frac{-5}{2}l\right]}.$$

Beachtet man die Definitionsgleichung (55), so bekommt man aus (3)

$$A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = \alpha_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) \frac{2^7}{3 \cdot 5} \pi^3 T^{\frac{5}{2}} H^{(7)} \prod_{p>2} (1 - \varepsilon_p p^{-3}).$$

Dabei muß man für $\alpha_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ noch die Werte aus (54) eintragen.

Es ist bemerkenswert, daß für gerade m im Resultat keine Geschlechtscharaktere auftreten, so daß in diesem Fall die Ergebnisse wesentlich von der Ordnung der Formen abhängen und außerdem, der $\alpha_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ wegen, von den durch $\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y}$ mod 4 dargestellten Zahlen.

§ 4. Beispiele.

Zahlenbeispiele. Gegeben sind die Formen

1)	$\mathfrak{x}'\mathfrak{x} = x_1^2 + x_2^2$	und	$\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y} = 9(y_1^2 + y_2^2)$
2)	$\mathfrak{x}'\mathfrak{x} = x_1^2 + x_2^2$		$\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y} = 25(y_1^2 + y_2^2)$
3)	$\mathfrak{x}'\mathfrak{x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$		$\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y} = 3y_1^2 - 6y_1y_2 + 30y_2^2$
4)	$\mathfrak{x}'\mathfrak{x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$		$\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y} = 5y_1^2 + 10y_1y_2 + 30y_2^2$.

Gefragt ist in jedem Fall nach der Anzahl der ganzen $\mathfrak{C}$ der Art, daß vermöge der Substitution $\mathfrak{x} = \mathfrak{C}\mathfrak{y}$ die Form $\mathfrak{x}'\mathfrak{x}$ übergeht in die Form $\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y}$. Es ergibt sich jeweils aus dem vorigen Paragraphen

1) $A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = 8$, 2) $A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = 8 \cdot 3$, 3) $A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = 0$, 4) $A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = 16 \cdot 3$.

Durch Aufstellen aller möglichen $\mathfrak{C}$ prüft man die Richtigkeit dieser Resultate.

Durch die in diesem Kapitel bewiesenen Sätze kommt man auf einem völlig anderen Weg als Mordell zu den Resultaten über die Darstellbarkeit einer imprimitiven binären quadratischen Form durch eine Summe von m ($\leqq 8$) Quadraten linearer Formen, wenn man nur noch die Darstellbarkeit von Formen mit gerader Determinante im Dyadischen diskutiert. Unter Anwendung der Rekursionsformel (11) findet man für $m = 3$, 4 und 5 die entsprechenden, bisher noch nicht bewiesenen Sätze über primitive ternäre Formen. Die dazu notwendigen einfachen Rechnungen sollen an dieser Stelle nicht durchgeführt werden. Es seien nur zwei Existenzaussagen formuliert, die sich ohne Rechnung aus den bewiesenen Sätzen ergeben:

1. *Eine binäre quadratische Form $\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y}$ ist sicher nicht durch eine Summe von drei Quadraten linearer Formen darstellbar, wenn für einen ungeraden Primteiler p von T entweder die Zahl r ungerade und $\zeta_p^{s-1} = -\eta_p$ ist, oder r gerade, s ungerade und $\zeta_p = -1$ ist. Hat T keine Primteiler von dieser Beschaffenheit, so ist $\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y}$ dann und nur dann durch eine Summe von drei Quadraten linearer Formen darstellbar, wenn die Darstellung im Dyadischen möglich ist.*

2. *Nach* (54) *und* (56) *ist bei ungeradem T die binäre Form $\mathfrak{y}'\mathfrak{T}\mathfrak{y}$ dann und nur dann durch eine Summe von vier Quadraten linearer Formen darstellbar, wenn $T \not\equiv 7 \pmod 8$ ist.*

Eine andere Gruppe von Beispielen ergibt sich, wenn man über T noch gewisse Voraussetzungen macht, wie im folgenden Fall:

Man wende (56) an für quadratisches T, dessen Primteiler alle $\equiv 1 \pmod 4$ sind. Indem man noch (54) beachtet, ergibt sich

$$A(\mathfrak{E}, \mathfrak{T}) = 3 \cdot 2^4 \cdot T^{\frac{1}{2}} \prod_{p|T} (r + 1).$$

Dabei ist über alle Primteiler von T zu summieren.

Eingegangen 13. Juni 1937.